

Matice přechodu

Bud' V vektorový prostor a B_1 a B_2 jeho dvě báze. Pak matici přechodu od B_1 do B_2

nazveme maticí ${}_{B_2}[\text{id}]_{B_1}$.

Podle maticí reprezentace má tento význam:

$$[x]_{B_2} = {}_{B_2}[\text{id}]_{B_1} \cdot [x]_{B_1}$$

Zřejmě platí, že ${}_{B_1}[\text{id}]_{B_1} = I_n$

Matice lineárního zobrazení

Bud' $f: U \rightarrow V$ lin. zobrazení. $B_U = \{x_1, \dots, x_n\}$, $B_V = \{y_1, \dots, y_m\}$ báze U a V .

Nechť $f(x_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i$. Potom matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ s prvky α_{ij} ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$)

se nazývá matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím B_U a B_V ,

známé

$${}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [f(x_1)]_{B_V} & \dots & [f(x_n)]_{B_V} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Isomorfismus

Isomorfismus mezi prostory U, V nad $\mathbb{T}$ je vzájemně jednoznačné zobrazení $f: U \rightarrow V$.

1) $f: U \rightarrow V$ je isomorfismus, pak $f^{-1}: V \rightarrow U$ je taky.

2) $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow W$ isomorfismus, pak $f \circ g: U \rightarrow W$ taky

3) Zobrazení $f: U \rightarrow V$ je isomorfní, když se B_u zobrazí na B_v

4) Je-li $f: U \rightarrow V$ isomorfismus, $\dim U = \dim V$

Lineární zobrazení

- Zobrazení je lineární:

1) Pokud $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

- Obraz a jádro

Bud' $f: U \rightarrow V$ lin. zobrazení:

- obraz $f(U) := \{f(x) : x \in U\}$

- jádro $\ker(f) := \{x \in U : f(x) = 0\}$

Maticový prostor

Bud' $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$, pak definujeme:

1) sloupový prostor $\mathcal{U}(A) := \text{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$

2) řádkový prostor $\mathcal{Q}(A) := \mathcal{U}(A^T)$

3) jádro $\ker(A) := \{x \in \mathbb{T}^n : Ax = 0\}$

$\mathcal{U}(A)$ je podprostor $\mathbb{T}^n$, $\mathcal{Q}(A)$ je podprostor $\mathbb{T}^n$, $\ker(A)$ je podprostor $\mathbb{T}^n$

Dimenze

Dimenze konečn^ě generovan^{ého} prostoru je velikost jeho báze.

Báze

Bud^ě V vekt. prostor nad Π . Pak bázi rozumíme jakýkoli LNZ systém gen. V .

Souřadnice

Necht^ě $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ je báze prostoru V a necht^ě vektor $u \in V$ má vyjádření:

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i. \text{ Pak } \underline{\text{souřadnice}} \text{ vektoru } u \in V \text{ vzhledem k bázi } B$$

rozumíme koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $[x]_B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}^T$

Lineární nezávislost

Bud^ě V vektorový prostor nad Π , $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak $v_1, \dots, v_n$ jsou LNZ,

když $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Podprostor

Bud^ě V vektorový prostor nad Π . Pak $U \subseteq V$ je podprostorem V , pokud tvoří vektorový prostor nad Π se stejn^ě definovanými operacemi.

1) $0 \in U$

2) $\forall u, v \in U: u+v \in U$

3) $\forall \alpha \in \Pi, \forall u \in U: \alpha u \in U$

Lineární obal

Bud' V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, $W \subseteq V$. Pak lin. obal W , značený $\text{span}(W)$ je průnik všech podprostorů V obsahujících W .

To jest
$$\text{span}(W) = \bigcap_{W \subseteq U \subseteq V} U$$

Lineární kombinace

Bud' V vekt. prostor nad $\mathbb{T}$, pak lin. komb. vektorů $v_1 \dots v_n$ rozumíme výraz
typu $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, kde $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{T}$

Vektorový prostor

Bud' $\mathbb{T}$ těleso s nen. 0 pro +, 1 pro $\cdot$. Vektorovým prostorem nad $\mathbb{T}$ rozumíme množinu V s operacemi sčítání vektorů $+$: $V^2 \rightarrow V$ a násobení vektorů skalárem $\cdot$: $\mathbb{T} \times V \rightarrow V$ splňující pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ a $u, v \in V$:

- 1) $(V, +)$ je Abelova grupa
- 2) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
- 3) $1v = v$
- 4) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
- 5) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

Charakteristika tělesa

Charakteristika tělesa je nejmenší n takové, že:

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_n = 0$$

Pokud neexistuje, definuje se jako 0.

Těleso

Těleso je množina Π spolu se dvěma komutativními binárními operacemi $+$ a $\cdot$:

- 1) $(\Pi, +)$ je Abelova grupa, nen zvažme 0 , inverz for a značíme $-a$
- 2) $(\Pi \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa, nen zvažme 1 , inverz for a značíme a^{-1}
- 3) $\forall a, b, c \in \Pi : a \cdot (b + c) = ab + ac$

Znaménko permutace

Nechť se permutace $p \in S_n$ skládá z k cyklů. Pak znaménko permutace je číslo $\text{sgn}(p) = (-1)^{n-k}$

Složení permutace

Bud' $p, q \in S_n$. Složení permutace $(p \circ q)$ je permutace definovaná: $(p \circ q)(i) = p(q(i))$.

Inverzní permutace

Bud' $p \in S_n$. Inverzní permutace k p je p^{-1} definovaná jako:

$$p^{-1}(i) = j, \text{ pokud } p(j) = i$$

Permutace

Permutace na konečné množině X je vzájemně jednoznačné zobrazení $p: X \rightarrow X$

- značíme tabulkou, grafem, rozložením na cykly, délkou ≥ 2

Grupa

Bud' $\circ : G^2 \rightarrow G$ binární operace na množině G . Pak grupa je dvojice $(G, \circ)$ splňující:

$$1) \forall a, b, c \in G: a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

asociativita

$$2) \exists e \in G \forall a \in G: e \circ a = a \circ e = a$$

neutralní prvek

$$3) \forall a \in G \exists b \in G: a \circ b = b \circ a = e$$

inverzní prvek

+ Abelova grupa

$$+ 4) \forall a, b \in G: a \circ b = b \circ a$$

komutativita

Regulárnost matice

Bud' $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Matici A je reg., pokud soustava $Ax = 0$ má jediný
řešení $x = 0$