Prostory a násobení matic zleva

Buď $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{T}^{p \times m}$. Pak

1) $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$
2) Pokud $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \dots, n\}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, $j \neq k$,
   pak $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$

1) Stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Buď $x \in \mathcal{R}(QA)$, pak existuje $y \in \mathbb{T}^p$ takové, že $x = (QA)^T y = A^T Q^T y = A^T (Q^T) y \in \mathcal{R}(A)$

Vztah počtu prvků systému k dimenzi

Pro vektorový prostor V platí:

1) Nechť $x_1 \dots x_m \in V$ jsou LNZ. Pak $m \leq \dim V$.
   Pokud $m = \dim V$, je systém zároveň báze.
2) Nechť $y_1 \dots y_n$ je sys. gen. V. Pak $n \geq \dim V$.
   Pokud $n = \dim V$, pak systém je báze.

$d = \dim V$, nechť $z_1 \dots z_p$ je $\dim V$.

1. Protože $x_1 \dots x_m$ jsou LNZ a $z_1 \dots z_p$ generátory, tak podle Steinitze $m \leq p$.
   Pokud $m = d$, pak lze doplnit právě 0 vektorů, aby systém byl platí báze.

2. Protože $y_1 \dots y_n$ jsou generátory, tak podle Steinitze $n \geq d$.
   Pokud $n = d$, tak jestli jsou LNZ, jsou báze. Pokud jsou LZ, lze jeden odstranit.
   Pak by ale platilo, že $n - 1 \geq d$, což je spor. $\boxed{\text{↯}}$

Linearita souřadnic

Pro libovolnou bázi B kon. gen. prostoru V nad T, vektory $u, v \in V$ a $\alpha \in T$ platí:

$$[u+v]_B = [u]_B + [v]_B$$

$$[\alpha u]_B = \alpha [u]_B$$

Nechť báze B sestává z vektorů $z_1 \dots z_n$, nechť $u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i z_i$.

Potom $u+v = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + \gamma_i) z_i$ a tedy:

$$[u]_B + [v]_B = (\beta_1 \dots \beta_n)^T + (\gamma_1 \dots \gamma_n)^T = (\beta_1+\gamma_1 \dots \beta_n+\gamma_n)^T = [u+v]_B$$

$$\alpha [u]_B = \alpha (\beta_1 \dots \beta_n)^T = (\alpha\beta_1 \dots \alpha\beta_n)^T = [\alpha u]_B$$

Průnik podprostorů

Buď V vekt. prostor nad T, mějme V_i, $i \in I$, libovolný sys. podprostorů V.

Pak $\bigcap_{i \in I} V_i$ je opět podprostorem V.

Protože $o \in V_i \; \forall i$, tak náleží i $\bigcap$.

Buď $u, v \in \bigcap_{i \in I} V_i$, pro každé $i \in I$ je $u, v \in V_i$, tedy i $u+v \in V_i$. Proto $u+v \in \bigcap_{i \in I} V_i$

Analogicky pro násobení skalárem...

Charakteristika tělesa je buď 0 nebo prvočíslo

Protože $0 \neq 1$, nemůže být char. 1. Pokud by n nebylo prvočíslo:

$$0 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{pq} = \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{p} \cdot \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{q}$$

$$\begin{array}{ccc} pq & p & q \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

, což je spor s minimalitou