

Lineární zobrazení

- Matice složeného lin. zobrazení:

Bud' $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow W$ lin. zobrazení, bud' B_U, B_V a B_W báze.

$$B_W [g \circ f] B_U = B_W [g] B_V \cdot B_V [f] B_U$$

$\forall x \in U$

$$[(g \circ f)(x)]_{B_W} = [g(f(x))]_{B_W} = B_W [g] B_V \cdot B_V [f] B_U \cdot [x]_{B_U}$$

$[f(x)]_{B_V}$

- Jednoznačnost matice lin. zobrazení:

Bud' $f: U \rightarrow V$ lin. zobrazení, B_U, B_V báze. Pak jediná matice A splňující matici zobrazení je $A = B_V [f] B_U$.

Necht' $B_U \{z_1, \dots, z_n\}$, pak spr. máme $A + A'$ matice lin. zobrazení. Tudič existuje vektor $s \in \mathbb{R}^n$ takový, že $As \neq A's$.

$x = \sum_{i=1}^n s_i z_i$. Pak $[f(x)]_{B_V} = As \neq A's = [f(x)]_{B_V}$

$\boxed{\text{!}}$

Spr. s jednoznačností souřadnic.

Maticová reprezentace lin. zobrazení

Bud' $f: U \rightarrow V$ lin. zobrazení, B_U a B_V báze daných prostorů.

Pak pro každý $x \in U$ je:

$$[f(x)]_{B_V} = B_V [f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}$$

Nechť $A := B_V [f]_{B_U}$. Bud' $x \in U$, tedy $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$,

tedy $[x]_{B_U} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)^T$.

$$\text{Pak } f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i\right) =$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_j a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij}\right) y_i$$

Tedy výraz $\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij}$ reprezentuje i -tou souřadnici vektoru $[f(x)]_{B_V}$,

ale jeho hodnota je $\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij} = (A \cdot [x]_{B_U})_i$, což je

i -tá složka vektoru $B_V [f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}$.

0 dimenzi jádra a obrazu

Bnd^v $f: U \rightarrow V$ lin. zobrazení, B_U a B_V jeho báze.

$$A := B_V [f] B_U. \text{ Pak}$$

Tohle tam nebude, jasný!

$$1) \dim(\ker(f)) = \dim(\ker(A))$$

$$2) \dim(f(U)) = \dim(Y(A)) = \text{rank}(A)$$

① Prakticky stačí sestavit izomorfismus mezi $\ker(f)$ a $\ker(A)$.

Např.: zobrazení $x \in \ker(f) \rightarrow [x]_{B_U}$. Takové zobrazení je prosté a lineární

Prostota plyne z jednoznačnosti souřadnic (definice),
lineární proto, že lineární souřadnice je lin. kombinací
míjalekto vektoru.

Stačí dokázat, že $x \in \ker(A)$ a že je „mal“.

Nechť $x \in \ker(f)$, pak:

$$0 = [0]_{B_V} = [f(x)]_{B_V} = B_V [f] B_U \cdot [x]_{B_U}$$

tedy $[x]_{B_U}$ náleží do $\ker(A)$.

↑ Takže $\forall [x]_{B_U} \in \ker(A)$ je $f(x) = 0$

② $\dim U = n$, $\dim V = m$. Sestavíme izomorfismus mezi $f(U)$ a $Y(A)$ a fakt

$y \in f(U) \rightarrow [y]_{B_V}$. Opět je lineární a prosté. Dále pro $y \in f(U)$ existuje $x \in U$ takový,

že $f(x) = y$, tedy $[y]_{B_V} = [f(x)]_{B_V} = A \cdot [x]_{B_U}$, tedy $[y]_{B_V} \in Y(A)$. A naopak

pro každý $b \in Y(A)$ existuje $a \in \mathbb{R}^n$ takový že $b = Aa$. Tedy pro $x \in U$ takový, že $[x]_{B_U} = a$,

platí: $f(x) \in f(U)$ a zároveň $[y]_{B_V} = [f(x)]_{B_V} = A \cdot [x]_{B_U} = Aa = b \in Y(A)$

- Isomorfismus n -dimenzionálních prvků

Všechny n -dimenzionální prvky nad $\mathbb{T}$ jsou vzájemně isomorfní.

Podle tvrzení * jsou všechny n -dimenzionální prvky nad $\mathbb{T}$ isomorfní s $\mathbb{T}^n$ nad $\mathbb{T}$, tedy i vzájemně mezi sebou.

Tvrzení *:

Bud' V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ dimenze n s bází B .

Pak zobrazení $x \mapsto [x]_B$ je isomorfismus mezi V a $\mathbb{T}$ nad $\mathbb{T}^n$.

Nechť báze $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Zobrazení je lin, protože a m.

- Prvky p mají z jednoznačnosti souřadnic.

- „Na“, protože každá n -tice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{T}^n$ představuje souřadnice nějakého vektoru.

$$\text{konkrétně } x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$



Lineární zobrazení

$f: U \rightarrow V$ je lineární:

1) $f(U)$ je podprostor V

2) $\ker(f)$ je podprostor U

3) pro $u_1, \dots, u_n \in U$ platí: $f(\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}) = \text{span}\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$

1), 2) stačí ověřit a uzavřenost na sčítání násobení

3)

Injektivita $\subseteq$:

$W := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, $\forall w \in W$: $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ pro nějaká $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T}$.

2. linearity platí, že $f(w) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \in \text{span}\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$

Inhlazní 2:

Protože $x_1, \dots, x_n \in W$, tak $f(x_1) \dots f(x_n) \in f(W)$.

$f(W)$ je podprostor, tedy s vektory $f(x_1) \dots f(x_n)$ obsahuje i jejich spn.

- Zobrazení je "na":

$f: U \rightarrow V$ je na $\Leftrightarrow$ nějaký generátor prostoru U zobrazí na generátor prostoru V .

Zobrazení je "na", pokud $f(U) = V$, tedy že pro

každý vektor $x \in U$ existuje $y \in V$: $f(x) = y$

- vzhledem tedy generátoru U a vědět, jestli jejich obrazy generují V .

- Zobrazení je prosté: $f(x) = f(y)$ jenom pro $x = y$

Bud' $f: U \rightarrow V$ lin. zobrazení. Následující jsou ekvivalentní:

1) f je prosté

2) $\ker(f) = \{0\}$

3) Obraz LNZ množiny je LNZ množina

$1 \Rightarrow 2$: Protože $f(0) = 0$, tak $0 \in \ker(f)$. Vzhledem k tomu že je prosté, už ale jiný neobsahuje.

$2 \Rightarrow 3$: Necht' $x_1, \dots, x_n \in U$ a jsou LNZ a necht' $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = 0$

Pak $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = 0$, čili $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in \ker(f)$, tudíž $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$,

$3 \Rightarrow 1$: Sporem: $x, y \in U$, $f(x) = f(y)$, $x \neq y$. což dává LNZ pouze pro $\alpha = 0$ či

Potom $0 = f(x) - f(y) = f(x - y)$ a představuje LNZ množinu, tedy

$x - y = 0 \Rightarrow x = y$ 15

Jednoznačnost lin. zob. vzhledem k danému bázi

Bud' U, V prostory nad $\mathbb{T}$ a $x_1 \dots x_n$ báze U . Pak pro libvolná vektory $y_1 \dots y_n$ $\in V$ existuje právě jedno lin. zob. takové, že $f(x_i) = y_i$ pro $i = 1 \dots n$

"Existence"

Bud' $x \in U$ libvolné. Pak $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ pro $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{T}$.

$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$, protože lin. zobrazení musí splňovat:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$$

"Jednoznačnost"

Mějme dvě různá zobrazení f a g : $f(x_i) = g(x_i) = y_i$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(x_i) = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = g(x) \quad \boxed{?}$$

0 dimenzi jádra a hodnoty matice

Pro kvadr. matici $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ platí:

$$\dim(\ker(A)) + \text{rank}(A) = n$$

Nechť $\dim(\ker(A)) = k$. Pak $v_1 \dots v_k$ tvoří $\ker(A)$, tedy $Av_1 \dots Av_k = 0$.

Rozšíříme tyto vektory o $v_{k+1} \dots v_n$. Tyto vektory tvoří bázi $\mathcal{B}(A)$.

"Generalizace": Bud' $y \in \mathcal{B}(A)$, pak $y = Ax$ pro $x \in \mathbb{T}^n$. $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$

$$y = Ax = A \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i Av_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i (Av_i)$$

"LNZ": Bud' $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i = 0$. Pak platí, že $A \left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i \right) = 0$, tedy $\in \ker(A)$ a proto $\sum_{i=k+1}^n \beta_i v_i$ $\rightarrow$ z toho vyplývá...

$$\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^k -\beta_i v_i = 0, \text{ což vzhledem k LNZ vektorům } v_1 \dots v_n \text{ znamená, že}$$

$$\alpha_1 \dots \alpha_k = \beta_1 \dots \beta_k = 0$$

Dimenze spojení a průniku

Bud' U, V podprostor W . Pak platí:

$$\dim(U+V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V$$

Důkaz:

$U \cap V$ je podprostor W , tedy existuje konečná množina vektorů tvořící bázi $z_1 \dots z_p$.

Tu můžeme rozšířit na bázi U ($z_1 \dots z_p, x_1 \dots x_m$) nebo na bázi V ($z_1 \dots z_p, y_1 \dots y_n$).

Vektory $z_1 \dots z_p, x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n$ tak tvoří $U+V$.

"Generovanost":

Bud' $z = u+v$, $u \in U, v \in V$. Pak $u = \sum_{i=1}^p \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j$, $v = \sum_{i=1}^p \gamma_i z_i + \sum_{h=1}^n \delta_h y_h$.

Pak $z = \sum_{i=1}^p (\alpha_i + \gamma_i) z_i + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j + \sum_{h=1}^n \delta_h y_h$, tedy je lineární kombinací všech vektorů!

"LNZ":

Bud' $\sum_{i=1}^p \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j + \sum_{h=1}^n \gamma_h y_h = 0$

$z = \sum_{i=1}^p \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j = - \sum_{h=1}^n \gamma_h y_h$

→ chceme ukázat, že všechny koeficienty jsou nulové.

Zřejmě $z \in U \cap V$, tedy $z = \sum_{i=1}^p \gamma_i z_i$.
 $\sum_{i=1}^p \alpha_i z_i = - \sum_{h=1}^n \gamma_h y_h$

$\sum_{i=1}^p \gamma_i z_i + \sum_{h=1}^n \gamma_h y_h = 0$

Máme pouze triviální řešení,
tedy $\gamma_i = \gamma_h = 0$

→ dostáváme do původní rovnice
 $\sum_{i=1}^p \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^m \beta_j x_j = 0$,
tedy má opět triviální řešení
 $\alpha_i = \beta_j = 0$

Prozíření LNZ systémů m bází

Každý LNZ vektorového prostoru V lze rozšířit m bází V .

Nechť $x_1, \dots, x_m$ jsou LNZ a $z_1, \dots, z_d$ bází prostoru. Podle Steinitze existují indexy $h_1, \dots, h_{d-m}$ takové, že $x_1, \dots, x_m, z_{h_1}, \dots, z_{h_{d-m}}$ jsou generátory V . Těchto generátorů je d , tedy $\dim(V)$.

O existenci bází

Každý vektorový prostor má bází.

Každý prostor má své generátory. Pokud jsou LNZ, rovnou tvoří bází. Pokud jsou LZ, můžeme nějaký odebrat a pokud zbývající systém je LNZ, máme bází, jinak pokračujeme s odstraňováním.

Malý Fermatův věta

Bud' n prvočíslo a bud' $0 \neq a \in \mathbb{Z}_n$. Pak $a^{n-1} = 1 \pmod{n}$

Podle lemma* je $\{0, 1, \dots, n-1\} = \{0a, 1a, \dots, (n-1)a\}$.

$0 = 0a$, takže můžeme vykrátit a dostáváme $\{1, 2, \dots, n-1\} = \{1a, 2a, \dots, (n-1)a\}$.

Tedy $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) = 1a \cdot 2a \cdot \dots \cdot (n-1)a$

$$1 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n-1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{1 = a^{n-1}}}$$

Lemma*: Bud' n prvočíslo a buď $0 \neq a \in \mathbb{Z}_n$. Při násobení modulo platí:

$$\{0, 1, \dots, n-1\} = \{0a, 1a, \dots, (n-1)a\}$$

Necht' $ka = la$, kdy $k \neq l$ a $k, l \in \mathbb{Z}_n$. Z toho dostaneme,
že $ka - la = 0$, tedy $a \cdot (k - l) = 0$, což znamená, že

$$a = 0 \text{ nebo } k - l = 0$$
$$\boxed{\downarrow} \quad \quad \quad \boxed{\downarrow}$$
$$k = l$$

$\mathbb{Z}_n$ je těleso $\Leftrightarrow n$ je prvočíslo

Mějme n složený, tedy $n = p \cdot q$, pak $1 < p, q < n$.

Ukážeme, že $\mathbb{Z}_n$ bylo těleso, pak $p \cdot q = 0$, tedy $p = 0$ nebo $q = 0$

$$\boxed{\downarrow} \quad \quad \quad \boxed{\downarrow}$$

Mějme n prvočíslo:

Pak je třeba provést všechny axiomy o tělese.

Jediný problém je inverz pro násobení. Z lemma*[↑] uvidíme,
že vpravo náhoda musí být $ba = 1$, tedy $b = a^{-1}$

Každou permutaci lze rozložit na složení transpozic

Postupní permutaci $(u_1 \dots u_r)$ rozložíme následovně:

$$(u_1, \dots, u_r) = (u_1, u_2) \circ (u_2, u_3) \circ \dots \circ (u_{r-1}, u_r)$$

Takový rozklad nemá jednoznačný, pouze jeho parita je vždy stejná.

O znaménku složení permutace a transpozice

Bud' $p \in S_n$ a bud' $t = (ij)$ transpozice. Pak $\text{sgn}(p) = -\text{sgn}(p \circ t) = -\text{sgn}(t \circ p)$

Permutace p se zhlédá z několika cyklů. Pokud i, j jsou buď:

- 1) uvnitř stejného cyklu
- 2) v odlišných cyklech

1) $(i, u_1, \dots, u_r, j, v_1, \dots, v_n)$

Pak $(i, j) \circ (i, u_1, \dots, u_r, j, v_1, \dots, v_n) = (i, u_1, \dots, u_r), (j, v_1, \dots, v_n)$

tedy počet cyklů se zvětšil o 1, tedy $\text{sgn}(p) = (-1)^{r+1} \equiv$

2) $(i, u_1, \dots, u_r), (j, v_1, \dots, v_n)$

Pak $(i, j) \circ (i, u_1, \dots, u_r), (j, v_1, \dots, v_n) = (i, u_1, \dots, u_r, j, v_1, \dots, v_n)$

tedy počet cyklů se zmenšil o 1, tedy $\text{sgn}(p) = (-1)^{r-1} \equiv$

Oboje
změní znaménko

Znaménko permutace

$\text{sgn}(p) = (-1)^r$, kde r je počet transpozic.

$\text{sgn}(\text{id}) = 1$

$\text{sgn}(p) = (u_1, u_2) \circ (u_2, u_3) \circ \dots \circ (u_{r-1}, u_r) \circ (\text{id})$

tedy $(-1)^r$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{-1}}_1}_1 \quad r=0$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{-1}}_1}_1 \quad r=1$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{-1}}_1}_1 \quad r=2$$

Znaménko součinu permutací

Bud' $p, q \in S_n$. Pak $\text{sgn}(p \circ q) = (-1)^{r_1 + r_2}$, kde r_1 a r_2 jsou počty transpozic.

Nechť se permutace rozdělí na r_1 a r_2 transpozic. Pak jednotlivé permutace mají znaménko $(-1)^{r_1}$, $(-1)^{r_2}$, tedy $\text{sgn}(p) = (-1)^{r_1} \cdot (-1)^{r_2} = (-1)^{r_1 + r_2}$

Soustava rovnice a inverzní matice

Bud' $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Pak řešení soustavy $Ax = b$ je dáno vzorcem $x = A^{-1}b$

Pročťže A je reg., má soustava pouze jedno řešení x . Platí, že

$$x = Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \quad \checkmark \rightarrow \text{Tohle děláme pravidelně...}$$

Jedna rovnost stačí (regularita)

Bud' $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, je-li $BA = I_n$, pak jsou obě matice reg. a vzájemně inverzní.

Jelikož je I_n reg, musí být i A, B reg. Regularita je tedy splněna.

✓ Jinak by jedna z matic posílala nějaké řešení na 0 a $Ax=0$ by mělo nekonečně řešení

$$B = BI_n = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = I_n A^{-1} = A^{-1}$$

tak i $ABx = 0$

$$A = AI_n = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = I_n B^{-1} = B^{-1} \quad \square$$

O existenci inverzní matice

Bud' $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Je-li A reg., pak k ní existuje inverzní matice
a je určená jednoznačně. Naopak, existuje-li A^{-1} , je A reg. $AA^{-1} = I$

$$(AA^{-1})x_j = A(A^{-1})x_j = Ax_j = e_j = Ix_j$$

↓
tobto je j -tý
sloupec inv. matice

↓
pokud je A reg.,
má to jen jediné
řešení, a to je
 e_j , tedy sloupec
matice I_n

$$A(A^{-1}A - I) = AA^{-1}A - A = IA - A = 0$$