Df: Síť se skládá z:

1) $G=(V,E)$ symetrický orientovaný graf
2) zdroj, stok jsou navzájem různé vrcholy $z, s \in V$, $z \neq s$
3) $c := E \to \mathbb{R}_0^+$, což jsou kapacity hran

Df: Tok je $f: E \to \mathbb{R}_0^+$ t.ž.:

1) $\forall e \in E: f(e) \leq c(e)$
2) $\forall v \in V, v \neq z,s: f^{\Delta}(v) = 0$

Df: $f^+(v) := \sum_{uv \in E} f(uv)$ přítok

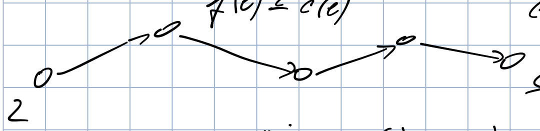
$f^-(v) := \sum_{vu \in E} f(vu)$ odtok

$f^{\Delta}(v) := f^+(v) - f^-(v)$ přebytek

Df: Velikost toku $|f| := f^{\Delta}(s)$

$f^{\Delta}(s) = -f^{\Delta}(z)$

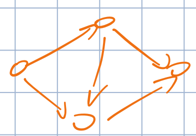
$\sum_v f^{\Delta}(v) = f^{\Delta}(s) + f^{\Delta}(z) = 0$

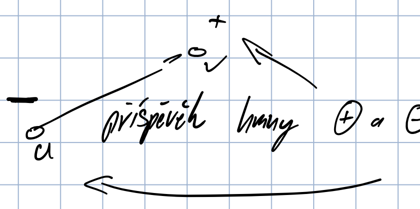


$\varepsilon := \min_{e \in P} c(e) - f(e)$

$\forall e \in P \; f(e) = f(e) + \varepsilon.$

=> Ten ale nefunguje:





Tedy celkem hrana nepřispěje vůbec

Df: rezerva hrany uv: $r(uv) := \underbrace{c(uv) - f(uv)}_{\text{po směru}} + \underbrace{f(vu)}_{\text{proti směru}}$

Fordův-Fulkersonův alg:

- budu chodit i proti orientaci hrany, jen v tom případě hraně o hodnotu toku směrem její tok.

1) $f = 0$
2) Dokud $\exists P$ nenasycená cesta $z \to s$: ($\forall e \in P: r(e) > 0$)
3) $\quad \varepsilon := \min_{e \in P} r(e)$
4) $\quad \forall uv \in P$:
5) $\quad\quad \delta = \min(\varepsilon, f(vu))$
6) $\quad\quad f(vu) \leftarrow f(vu) - \delta$
7) $\quad\quad f(uv) \leftarrow f(uv) + \varepsilon - \delta$

Konečnost:

1) Pro celočíselné c: ANO
2) Pro racionální c: ANO
3) Pro iracionální c: NE => obecně!

=> Pokud by se ale procházelo od nejkratší nenasycené cesty, je počet iterací konečný. $O(n \cdot m)$

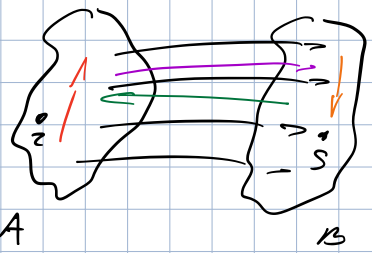
Certifikát maximálního toku:

Mějme el. řez mezi A, B, kde $z \in A$, $s \in B$. Pak $f(A,B) = \sum_{e \in E(A,B)} f(e)$

$$f^{\Delta}(A,B) = f(A,B) - f(B,A)$$

$f^{\Delta}(A,B) = |f|$ pro jakýkoli tok a řez.

Uvnitř $\sum_{v \in B} f^{\Delta}(v) = f^{\Delta}(s) = |f|$



A	B
nepřispěje	přispěje záporně
nepřispěje	přispěje kladně
nepřispěje	nepřispěje
nepřispěje	nepřispěje

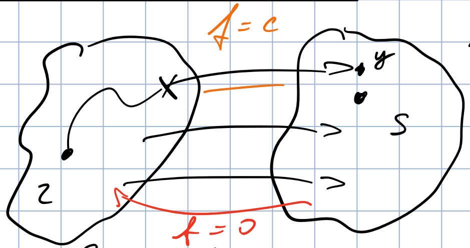
Tedy velikost toku lze měřit i kdekoliv na el. řezu

Lemma: $\forall f$ tok, $\forall E(A,B)$ řez: $|f| \le c(A,B)$

$\overset{=}{}$ pokud f je max, $E(A,B)$ je min

$$|f| = f^{\Delta}(A,B) = \underbrace{f(A,B)}_{\le c(A,B)} - \underbrace{f(B,A)}_{\ge 0}$$

Situace po zastavení F-F



$B := V \setminus A$

$|f| = c(A,B)$

$A := \{v \mid \exists$ cesta ze z do v po nenasycených$\}$

Df: Párování v grafu (V,E):

je $F \subseteq E$ t.ž. $\forall e,f \in F: e \cap f = \emptyset$

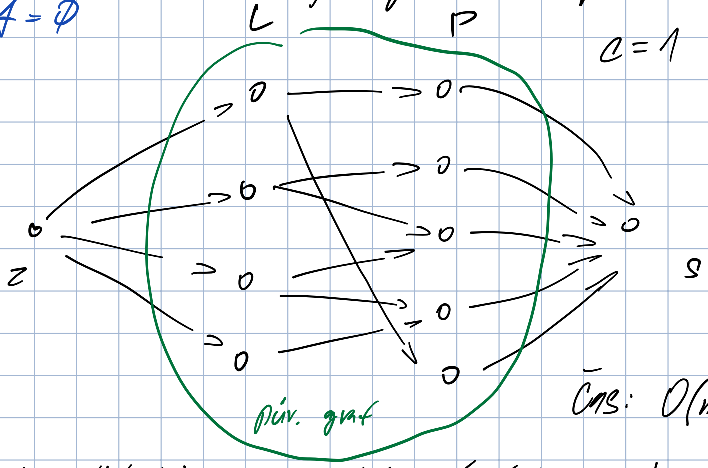
Úloha: <u>Největší párování v bipartitním grafu</u>

Největší číselný tok f

Párování bude odpovídat hranám pův. grafu s $f=1$

! bijekce mezi toky a párováním zachovávající velikost !

$c = 1$



$\Rightarrow$ Maximální tok $\approx$ největšímu párování

Čas: $O(n'm')$

$n' = n+2$

$m' = m+n$

$O(n'm') = O((n+2)(m+n)) = O(nm)$

V: Pokud $\forall e \in E: c(e) \in \{0,1\}$, pak F-F alg doběhne v čase $O(nm)$.

Počet iterací je $O(n)$, jeden krok trvá $O(m)$

$\hookrightarrow$ Víc než n hran nemůže vést ze zdroje.

Df: Čistý tok f^* k toku f: $f^*(uv) := f(uv) - f(vu)$

1) $f^*(uv) = -f^*(vu)$

2) $-c(vu) \le f^*(uv) \le c(uv)$

3) $\forall v \ne z,s: f^\Delta(v) = 0$

pro $f^\Delta(v) := \sum_{uv \in E} f^*(uv)$

Lemma: $\forall g$ splňující ①②③ $\exists f$ tok, že $g = f^*$

BÚNO: Zvolíme uv libovolně, $g(uv) \ge 0$.

$\left.\begin{array}{l} f(uv) := g(uv) \\ f(vu) := 0 \end{array}\right\} f \le c$

$r(uv) = c(uv) - f^*(uv)$