

Def: Vlna $f: E \rightarrow \mathbb{R}^0$

1) $f \leq 0$

2) $\forall v \neq s, z : f^0(v) \geq 0$

Def: Spád $uv = h(u) - h(v)$

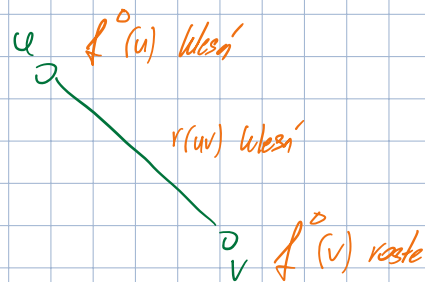
Def: Výšky: $h: V \rightarrow \mathbb{N}$

Def: Přechod z u do v :

1) $f^0(u) > 0$

2) $r(uv) > 0$

3) $h(u) > h(v)$



Goldbergův algoritmus

1) $\forall v : h(v) = 0, h(z) = n$

Inicializace

2) $\forall e : f(e) = 0$

Vytváření prvních vln

$\forall z, v \in E : f(zv) = c(zv)$

3) Pokud $\exists u \neq z, s, f^0(u) > 0$

4) Pokud $\exists uv : r(uv) > 0, h(u) > h(v)$

5) Přechodem po uv .

6) Jinak:

7) $h(u) = h(u) + 1$

Vždycky se zůstane a f bude maximální tok

→ Očividně by bylo možné upravit vždy vlnu, která je nejvyšší a obsahuje nejvyšší přebytek

Invarianty a lemma o alg.

Inv. A: f je vždy vlna

Inv. B: Výšky nikdy neklesají

Inv. C: $h(z) = n, h(s) = 0$

Inv. D: $\forall v \neq z : f^0(v) \geq 0$

Inv. S: Pokud $r(uv) > 0$, pak $h(u) - h(v) \leq 1$.

Inv. F: $\forall v : h(v) \leq 2n$

Já ale uvidím, pokud nemám přebytek přebytek. Tudiž by $\exists$ nemyslel cestu z výšky $2n$ do výšky n , tedy se spádem n , což je počet vln. Tudiž víc by byl spor s Inv. S.

Lemna 1: Učty se alg. zastaví, f je maximální tot.

Ov: 1) $\hat{f}$ je to tot. 2) $\hat{f}$ je maximální

1) Vlna obsahuje přechyby ve všech vrcholcích, ale alg. zastaví, pokud přechyby existují ve vrcholcích $\neq z, s$. Tedy to má být také tot.

2) Učty f nebylo maximální, $\exists$ nesporná cesta z u do s .

Učty f může obsahovat jen
o 1. Tedy pomocí $n-1$ hran
neobsahuje o n .

$\hookrightarrow$ Takže cesta
přechyby u
cestou u $n-1$ vrcholů.

$\hookrightarrow$ Jednou u by musela mít $spad > 1$ $\hookrightarrow$
nesporná

Lemna 2: $\#$ vrcholů $\leq 2n^2$

1 vrchol nejvíce $2n$ hran (inv F), tedy řešení $2n^2$.

Inv E : Pokud $f^p(u) > 0$ pro $u \neq z, s$,
pak $\exists$ nesporná cesta z u do z .

Důkaz Inv E :

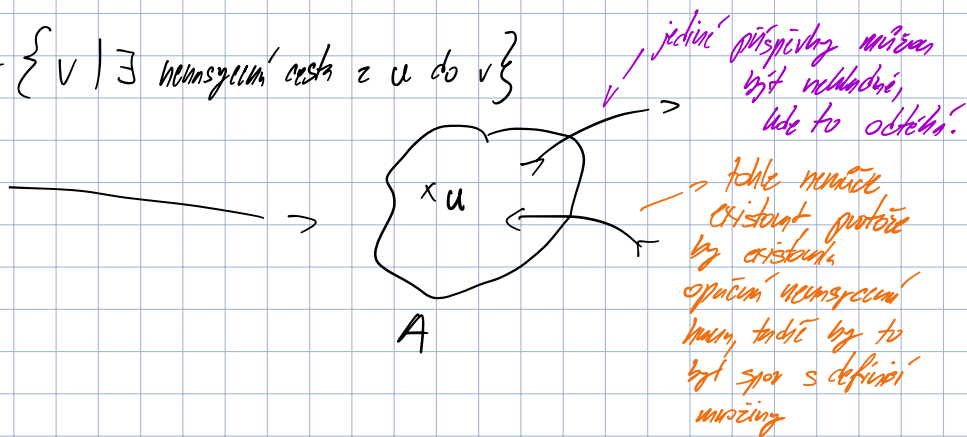
Ujme $f^p(u) > 0$, $A := \{v \mid \exists \text{ nesporná cesta } z \text{ } u \text{ do } v\}$

$$\sum_{v \in A} f^p(v) \leq 0$$

$$\hookrightarrow \exists v \in A: f^p(v) < 0$$

$\hookrightarrow$ To je ok zdvoj!

Takže v je zdvoj. Tedy $z \in A$.



Lemma S: (nasypaní převodem)

Celkový # převodů $\leq mn$.

Uvažme uv :

- probíhá zde nejíc n převodů.

→ Uvažme, že uv je sytý převod.

Tedy $r(uv) = 0$.

→ Pak se musí přenést z v do u .
Tedy $h(v) > h(u)$.

→ Pak nějaký vrchol znovu
převést, i u musí vyjít o 2.

Výška je řádu mn v $\mathbb{Z}_n$. Tedy
může být převod jen n krát.

Jelikož musí každý převod se musí zvednout
o 2.

Df: Převod po hraně uv

Nasypaní nenasycení $\rightarrow f(u)$
= $r(uv)$ klesá v 0 .
klesá v 0 .

Lemma NS: (nenasycení převodem)

Na celém dohu výpočtu, # nenasycených převodů
je $O(n^2m)$.

Df: Potenciál $\Phi := \sum_{\substack{v \neq s \\ f(v) > 0}} h(v)$.

1) $\Phi \geq 0$ → výška nikdy není záporná

2) Φ na začátku je 0.

3) Po zvednutí $\Delta \Phi = 1$

4) Zvednutí je nejíc $2n^2$. Tedy celkem $\Delta \Phi \leq 2n^2$

5) Sytý převod: Za jedno sytí převod $\rightarrow \Delta \Phi \leq 2n$

Za všechny tedy $\Delta \Phi \leq 2n^2m$

↓
Js jsem jen mohl
jeden vrchol maximálně zvednout

6) Nenasycení převod:

$$\Delta \Phi \leq -1$$

↙ A jelikož $\Phi \geq 0$, tak
četba potenciálů zmen
kde max $O(n^2m)$

Implementace:

$S := \text{seznam } v \in V : f^D(v) > 0$ $\rightarrow$ hledání vrcholů s neprořezávaným příchodem

$f_v : H(v) := \text{seznam } v \in E : r(vw) > 0 \text{ \& } h(v) - h(w) \geq 1$ $\rightarrow$ seznam pro hrany po které přecházíme

Časová složitost

Věta: Alg. běží v čase $O(n^3)$.

- výběr vrcholů a hran $= O(n)$
- převedení $= O(n)$ $O(mn) + O(n^2m)$
- zúčtování $= O(n)$ $O(n^3) \rightarrow$ což je ale fakt $O(n^3)$.

Lemma: V Goldbergovi s výborem nejvyššího vrcholu je # nespojených převedení $O(n^3)$.

Důk: $H := \max \{ h(v) \mid f^D(v) > 0 \}$

Rozdělme běh alg. na fáze fáze končí při změně H .

$\hookrightarrow$ Buď zvýšení/snížení o 1.

$\hookrightarrow$ Růžší může nastat jen $O(n^2)$ $\rightarrow$ Snížení může být nejvýš stejné.

$\hookrightarrow$ Fáze tedy je celkem $O(n^2)$.

Stačí ukázat, # nespojených převedení 1 fáze $\leq n$.

- jakmile vynecháme příchody, tak v dané fázi se již k tomu vrchol nemůžeme. Tedy každý vrchol nejvýš 1.