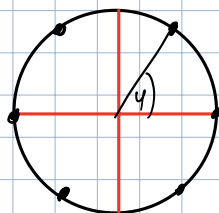


Komplexní n -tá odmocniny z 1.



$$e^{\frac{2\pi i k}{n}} \quad p.k. \quad k = 0 \dots n-1$$

Df: Číslo w :

primitivní n -tá odmocnina z 1 $\Leftrightarrow$

$$w^n = 1 \text{ a } w^1, \dots, w^{n-1} \neq 1$$

$e^{\frac{2\pi i}{n}}$ je primitivní, $e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ také.
 $w^{-1} = \overline{w}$

Vlastnosti:

1) $w^0 \dots w^{n-1}$ jsou navzájem různé.

$$\text{Kdyby } w^j = w^k: 0 \leq j < k < n, \text{ pak } 1 = \frac{w^k}{w^j} = w^{k-j} \quad 0 \leq k-j < n$$

2) Pokud n sudé, pak $w^{n/2} = -1$

$$(w^{n/2})^2 = w^n = 1 \rightarrow \text{druhá odmocnina z 1 v } \mathbb{C}, \text{ tudíž } \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Láchnan min. alg:

$$\text{Vektory } \vec{x} = (w^0, \dots, w^{n-1})$$

$$w^{n/2+j} = w^{n/2} \cdot w^j, \text{ tudíž to bude správně splňované}$$

$$(w^j)^2 = w^{2j} = (w^2)^j \rightarrow w^2 \text{ je primitivní } \sqrt[n]{1}$$

(FFT)

Vstup: $n = 2^k$, w primitivní $\sqrt[n]{1}$, $(p_0 - p_{n-1})$ koef. polynomu

Výstup: $(y_0 - y_{n-1})$ t.j. $y_i = P(w^i)$

Alg:

1) Pokud $n=1$: vrátíme $y_0 = p_0$

$$2) (s_0 - s_{n/2-1}) = \text{FFT}(n/2, w^2, (p_0, p_2, \dots, p_{n-2}))$$

$$(t_0 - t_{n/2-1}) = \text{FFT}(n/2, w^2, (p_1, p_3, \dots, p_{n-1}))$$

3) Pro $j = 0 \dots n/2-1$:

$$y_j = s_j + w^j \cdot t_j$$

$$y_{n/2+j} = s_j - w^j \cdot t_j$$

$$\rightarrow O(n \log n)$$

Def: Diskrétní Fourier Transformace (DFT) je $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ t.č.

$\bar{x} \rightarrow \bar{y}$, kde $\forall j: y_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot w^{jk}$, přičemž w je n -tý odmocnina z 1

$$F(p_0 \dots p_{n-1}) = (P(w^0), \dots, P(w^{n-1}))$$

— tohle je lin. kombinace. unitární součin

Tudíž $F(\bar{x}) = \Omega \cdot \bar{x}$, kde $\Omega_{jk} = w^{jk}$

Hledání inverze:

$$(\Omega \cdot \bar{\Omega})_{jk} = \sum_t \underbrace{\Omega_{jt}}_{w^{jt}} \cdot \underbrace{\bar{\Omega}_{tk}}_{w^{-tk} = \bar{w}^{tk} = w^{-tk}} = \sum_t (w^{j-k})^t$$

$$q^k = \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

$$\Omega \cdot \bar{\Omega} = \begin{pmatrix} n & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

$$\sum_t 1^t = n$$

$$\frac{(w^{j-k})^n - 1}{w^{j-k} - 1} = \frac{0}{\neq 0} = 0$$

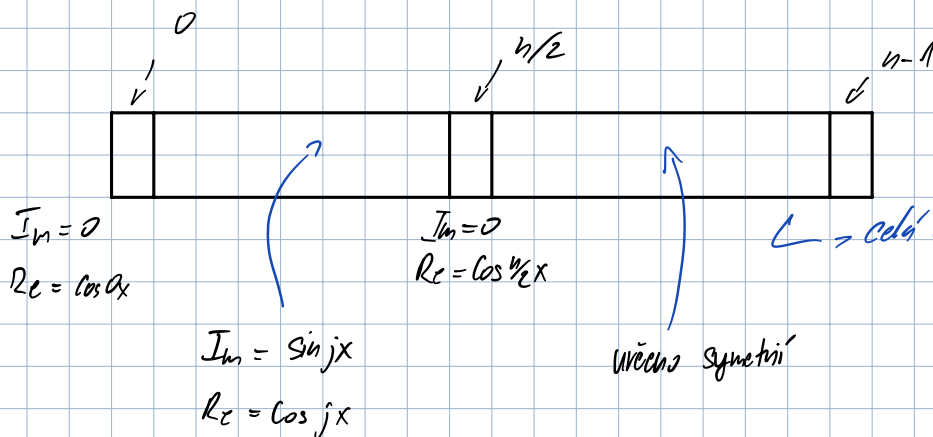
$\hookrightarrow 0 < j-k < n$, díky primitivnosti $\neq 0$.

Důsledek

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \bar{\Omega}$$

F_w^{-1} spočítáme jako $\frac{F_w}{n}$

Tudíž i inverzi umíme v $O(n \log n)$



$\hookrightarrow$ celá daná půlka je symetrická vůči první

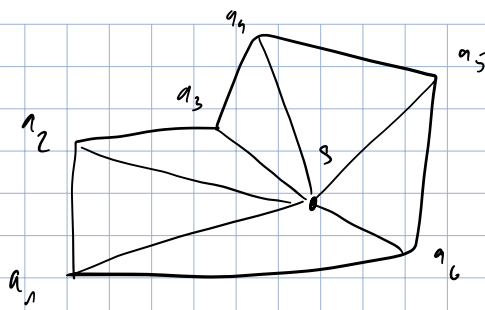
uvědom symetrie

Věta: Fourierův koef. je symetrický.

$$\bar{y}_j = \sum_k x_k w^{jk} = \sum_k \bar{x}_k \cdot \bar{w}^{jk} = \sum_k x_k \cdot (w^{n-j})^k = y_{n-j}$$

To je ale přesně $n-j$ -tý Fourierův koeficient. Tedy platí symetrie.

$$\begin{vmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} 1 & a_x & a_y \\ 1 & b_x & b_y \\ 1 & c_x & c_y \end{vmatrix} = 2 \cdot S(\Delta_{a,b,c}) \quad \rightarrow \text{Bereite to fahst.}$$