

1) Porovnejte funkce:

Poly	Exp	Super Exp
$n^2 \sim \binom{2^n}{2}$	2^n $\binom{2n}{n}$	$n! \sim 2^{n \log n}$ $n^n \sim 2^{n \log n}$

$$n = 2^{\log n} \quad n^n = (2^{\log n})^n = 2^{n \log n}$$

2) Stirlingova formule

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \cdot \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k} = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{\sqrt{2\pi(n-k)} \cdot (n-k)^{n-k} \cdot \sqrt{2\pi k} \cdot k^k}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{k\pi^2}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-k} \cdot \sqrt{k}} \cdot \frac{n^n}{(n-k)^{n-k} k^k} = \sqrt{\frac{n}{2\pi \cdot k \cdot (n-k)}} \cdot \frac{n^n}{(n-k)^{n-k} k^k}$$

Stirling a její odměny!

Hledáme pravděpodobnost, že permutace bude obsahovat právě jeden cyklus o délce větší než 1.

Celkem permutací... $n!$

Pravděpodobnosti odměny:

1 střížba ...

2 střížba ...

h . střížba

$$\frac{n-1}{n}$$

$$\frac{n-2}{n-1}$$

$$\frac{n-h}{n-h+1}$$

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n-k+1} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \text{zbyde tedy } \underline{\underline{\frac{1}{n}}}$$

→ každý si vybere kromě vlastního

→ každý si kromě předchozího

→ ze zbylých

Vysvětlení pomocí permutací:

Celkem máme $n!$ permutací. Hledáme počet permutací s 1 odfleknem.

$$P = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad \rightarrow \text{Vztahneme si jeden prvek jako bodem a zbytek zpermutujeme.}$$

4) Odhadněte $\binom{2k+1}{k}$ pomocí $\binom{2k}{k}$

Pascalův trojúhelník:

$$\binom{2k}{0} \dots \binom{2k}{k-1} \binom{2k}{k} \binom{2k}{k+1} \dots \binom{2k}{2k}$$

součet

$$\binom{2k}{k} \leq \binom{2k+1}{k} \leq 2 \cdot \binom{2k}{k}$$

5) Zespočti odhadněte sumu:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}}$$

$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \cdot \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{-1} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

$$= 2 \cdot (\cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}} + \sqrt{4} - \cancel{\sqrt{3}} \dots) = \underline{\underline{2\sqrt{n+1} - 2}}$$

6) Náhodně procházíme v $\mathbb{Z}^2$. Vypočítejte střední hodnotu počtu návratů do počátku.

Jaká je pravděpodobnost umístění jiné fixní pozice?

Vrátit se v horizontálním nebo vertikálním směru můžeme pouze na sousední políčka. Tedy $\binom{2n}{n}$. Pro oba směry tedy $\binom{2n}{n} \cdot \binom{2n}{n}$ možností, jak se vrátit.

Celkem možností pohybů je $2^{2n} \rightarrow$ jelikož v každém kroku jsou 4 možnosti.

$$P = \frac{\binom{2n}{n} \cdot \binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{\cancel{2^{2n}} \cdot \cancel{2^{2n}} \cdot c^2}{\cancel{2^{2n}} \cdot \cancel{2^{2n}}} \quad \binom{2n}{n} \sim 2^{2n} \cdot c$$

$\hookrightarrow$ Pravděpodobnost, že se v daném kroku vrátíme na začátek.

$$2 \cdot c \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \parallel \sim \frac{1}{n}$$

$$E[\text{\#návratů}] = \sum_{n=0}^{\infty} P(2n \text{ kroků pro návrat}) = \sum \frac{1}{n} = \infty$$