Sečtěte řady:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = [x^n]\left((1+x)^n\right)^2 \qquad (1+x)^n = \sum \binom{n}{i} x^i$$

$$\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\dots\binom{n}{n},0,0\right) \sim a(x)$$

$$\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\dots\binom{n}{n},0,0\right) \sim a(x)$$

$$\left(\binom{n}{0}^2,\dots,\dots\dots,\ ,\ ,\right) \sim a^2(x)$$

$$\binom{n}{0}\cdot\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\cdot\binom{n}{n-1}+\dots$$

Takže tohle člen to vynásobí mezi sebou

$$=\left(\binom{n}{n},\binom{n}{n-1},\binom{n}{n-2},\dots\binom{n}{0},0,0\right) \sim a(x)$$

$$[x^n](1+x)^{2n}$$

binomická věta

$$=\binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\,2^k$$

$$a(x)\sim(0,1,2,3\dots)^{k} \to \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$b(x)\sim(2^0,2^1,2^2,2^3,\dots)^{2^k}$$

chci $c(x)\sim(2^n,2^{n-1},2^{n-2},\dots,2^0) \to 2^n\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x}$

0 1 .... n indexy

pak $a(x)c(x)\sim(\dots\dots\ \sqcup\ )$

$\Sigma \to$ To bude $2^0\cdot 0+2^1\cdot 1+\dots$

Používáme konvoluci, jen to získáme páry u konkrétní pozice

$$[x^n]\,2^n\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}\cdot\frac{x}{(1-x)^2} = 2^n[x^{n-1}]\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = 2^n[x^{n-1}]\cdot\frac{A}{1-\frac{1}{2}x}+\frac{B}{(1-x)}+\frac{C}{(1-x)^2}$$

$$A = 1,\quad B = -2,\quad C = 2$$

Příklad 2: Matematický drak souhlasil s navrácením princezny Konstanty princi Integrálovi pokud mu pro každé n dodá truhlu s n předměty - sudý počet stříbrných pohárů, násobek pěti zlatých mincí, nejvýše 4 polodrahokamy a potenciálně jednou perlou. Kolika způsoby lze připravit n-tou truhlu? Nalezněte řešení jako koeficient polynomu nějaké vytvořující funkce.

n given

p = sudý

m = 5-násobek

pd = ≤ 4

per = ≤ 1

Celková konvoluce

sudý $p \sim (1,0,1,0,\dots) \sim \frac{1}{1-x^2}$ $a(x)$

násobek 5 $m \sim (1,0,0,0,0,1,\dots) \sim \frac{1}{1-x^5}$ $b(x)$

$a(x)\cdot b(x) \sim (1,0,1,\dots,\underset{10}{2},\dots)$

$1+x^1+x^2+x^3+x^4$

pd $\leq 4 \sim (1,1,1,1,1,0,\dots) \sim \frac{1-x^5}{1-x}$ $c(x)$

per $\leq 1 \sim (1,1,0,\dots) \quad \frac{1-x^2}{1-x} \sim 1+x$

$1+x^1$

$$[x^n]\, \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{1-x^5}}\cdot\frac{\cancel{1-x^5}}{1-x}\cdot\cancel{(1+x)} = [x^n]\frac{1}{(1-x)^2} = \underline{\underline{n+1}}$$

$\cancel{(1+x)}\cdot(1-x)$

$\parallel$

$(1,2,3,4,\dots)$

Důkaz indukcí podle počtu vyzkoušených případů.

Konečné projektivní roviny:

Co to je?

$(X, \mathbb{P}) \subseteq 2^X$

$\Leftarrow$ nosná množina

Nějaký kosmické cenzury:
- ty, které se ze všeho umí vymazat, proto o nich vůbec nevíme.

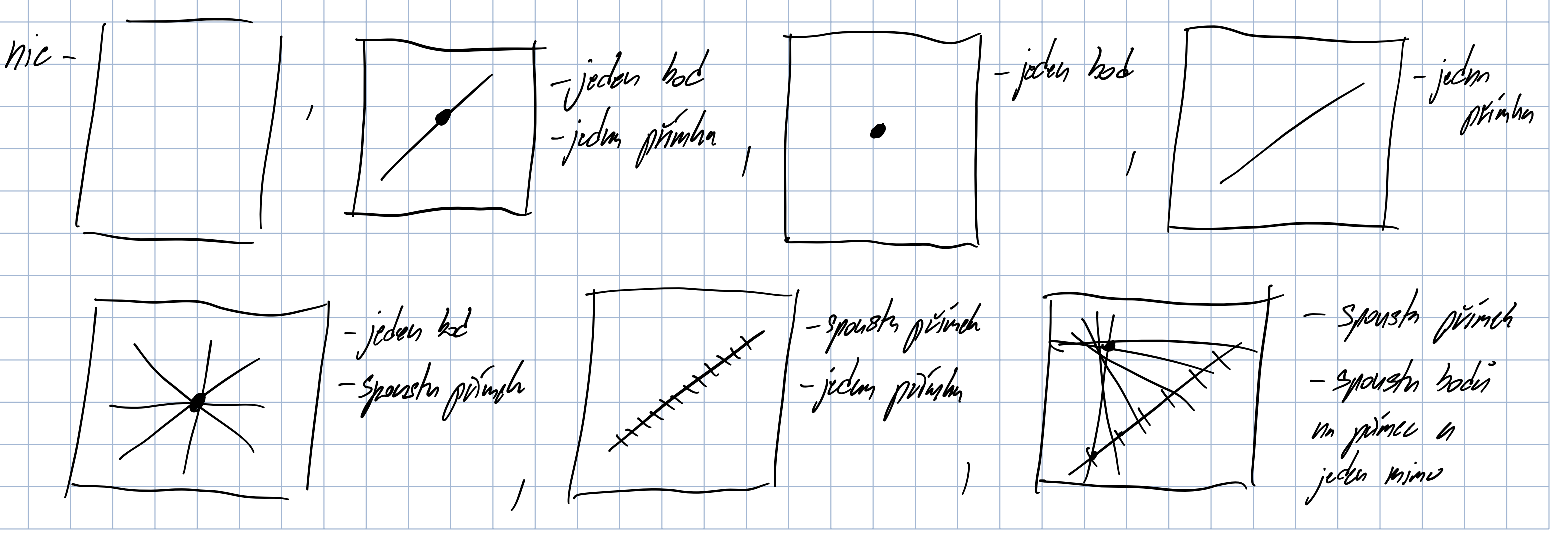
Příklad 3: Najděte (různorodé) příklady konečných množinových systémů $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$, které selžou pouze na axiomu nedegenerovanosti (A3). Je možné najít několik typů neomezené velikosti a několik triviálních.

(A1) $\forall x \neq y \in \mathcal{X}$, existuje **právě** jedna přímka $p \in \mathcal{P}$ t.ž. $x, y \in p$.

(A2) $\forall p \neq q \in \mathcal{P}$, existuje **právě** jeden bod $x \in \mathcal{X}$ t.ž. $x \in p \cap q$.

(A3) $\exists C \subseteq \mathcal{X}$, $|C| = 4$ t.ž. $\forall p \in \mathcal{P} : |p \cap C| \leq 2$.
("$\exists$ body v obecné poloze", "axiom nedegenerovanosti")

$\Leftarrow$ resp. co je to degenerovanost?



Příklad 4: Dokažte nebo vyvraťte ekvivalenci definice při nahrazení axiomu ($A3$) jedním z následujících axiomů:

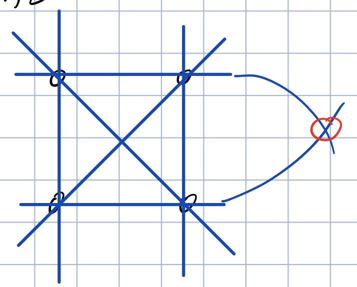
(A3') $\exists p \neq q \in \mathcal{P} : |p|, |q| \geq 3$ ("existují 2 netriviální přímky")

(A3") $\forall p, q \in \mathcal{P} : p \cup q \subsetneq \mathcal{X}$ ("$\mathcal{X}$ nelze pokrýt dvěma přímkami")

Chceme ukázat $A3 \Longleftrightarrow A3'$

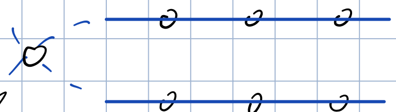
↳ $\forall p,q \in \mathcal{P}, \exists x \notin p,q$

$A3 \Rightarrow A3'$



→ Vytvořil jsem dvě přímky, co mají 3 body $\boxed{\times}$

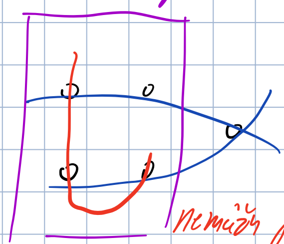
$A3' \Rightarrow A3$:



podle A2 tohle taky něco existuje

nebo

obecná poloha

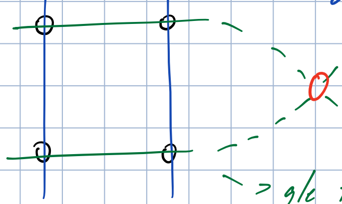


Nemůžu protínat ve třech bodech, protože bych pak jednou protínal 2x.

$A3 \Rightarrow A3''$: platí

Sporem

→ tyhle mají obsahovat všechny body



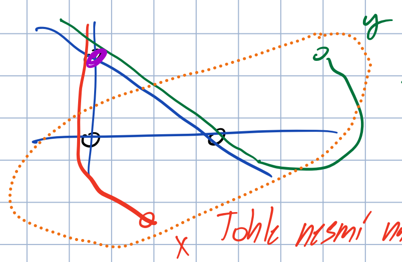
→ Takže spor! $\boxed{\times}$

→ ale tyhle přímky z povahy 4 bodů musí existovat a určitě se někde sejdou

$A3'' \Rightarrow A3$: platí

(1) $\exists \geq 2$ body

chci ale 4 obecné body



Tohle zase nesmí nastat

Tohle nesmí nastat

Pokud ty 4 body mají být v obecné poloze.

↳ Tady už mám obecnou polohu. Což je přemístěním: