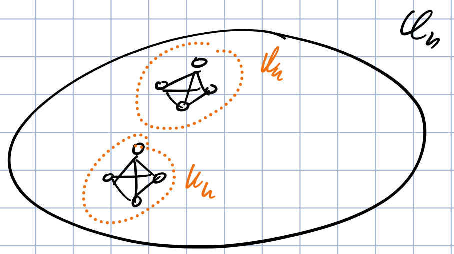
① Najděte n a k taková, že hrany úplného grafu na n vrcholech lze rozbít na úplné grafy velikosti k.

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} \cdot c$$

počet menších klik



dělitelný

$\forall v \in V: \deg(v) = n-1 \sim k-1$

$|V| \to \mathcal{Y}: S \subseteq V(G), \; |S| = k$

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} \cdot |\mathcal{Y}|$$

$q := \# S_i : v \in S_i$ (stejné pro všechna v)

$n-1 = (k-1)q \quad \to \quad n = kq - q + 1$

$\forall (S_1 \neq S_2 \in \mathcal{Y}): |S_1 \cap S_2| \leq 1$

$n \cdot (n-1) = k \cdot (k-1) \cdot |\mathcal{Y}|$

to se nesmí dělit

$(kq - q + 1) \cdot \cancel{(k-1)} \cdot q = k \cdot \cancel{(k-1)} \cdot |\mathcal{Y}|$

$q = k$

$kq - q + 1 = |\mathcal{Y}|$

$k^2 - k + 1 = |\mathcal{Y}|$

$\to q = k \cdot \alpha$

$k^2\alpha^2 - k\alpha^2 + \alpha = |\mathcal{Y}| \qquad n = k^2\alpha^2 - k\alpha + 1$

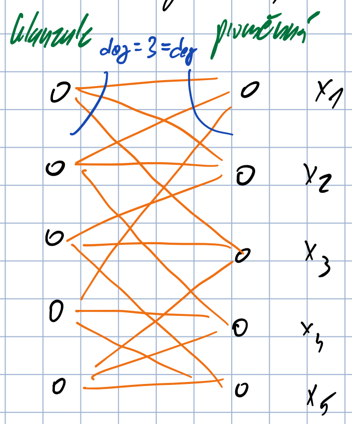
Toto je $\boxed{\text{KPR}}$

② Uvažte CNF, tři literály v každé klauzuli, každý literál se objevuje nejvýše třikrát (true nebo false). Ukažte pravdivost formule. (nápověda: řešení pomocí toků)

Z ADS: Udělám si graf, kde jednotlivé komponenty budou klauzule, jednotlivé vrcholy komponent literály klauzulí. Spojím pak mezi (sebou) komponentami opačné literály. Hledám nezávislou množinu o velikosti počtu formulí.

Pokus: 2 každé formule si vezmu unikátní novou proměnnou, kterou nastavím.

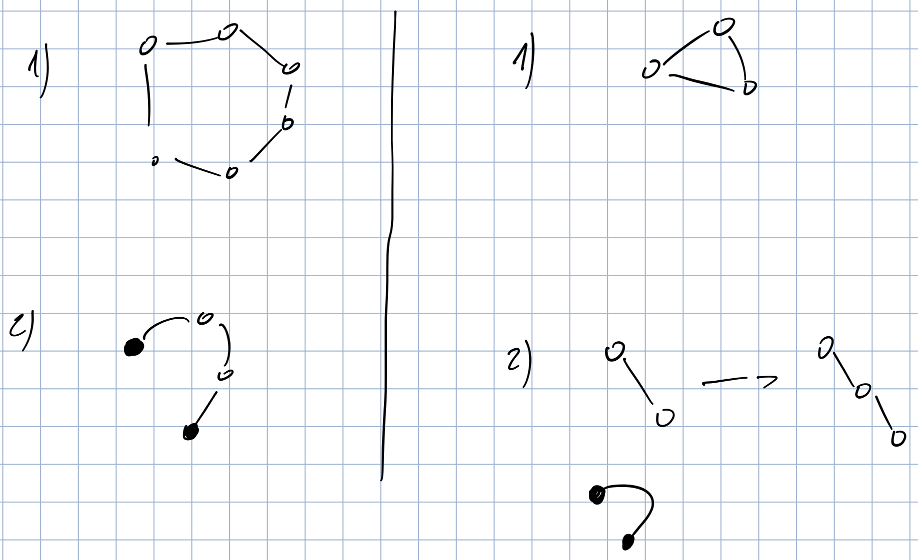
?(lze to ale udělat)?



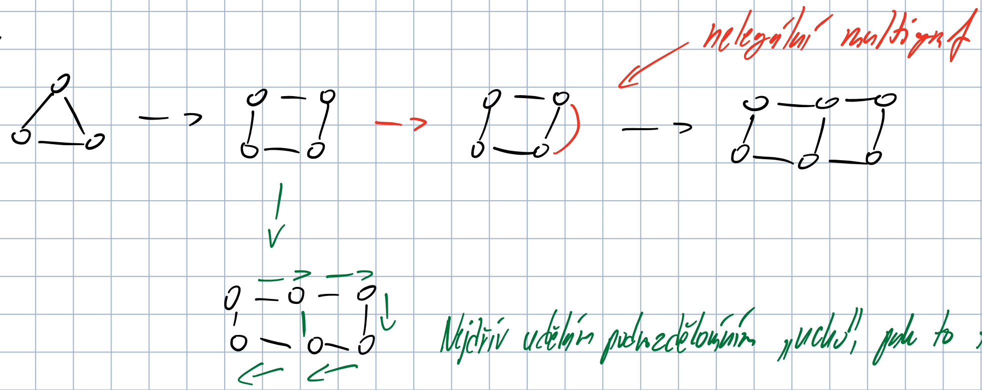
Mám 3-reg. bipartitní graf. $\Rightarrow$ Musí tam existovat párování.

③ Důkaz ušatého lemmatu pomocí konstrukce z trojúhelníku podrozdělováním hran a přidáváním hran.

G je vrch. souv.



Problém:

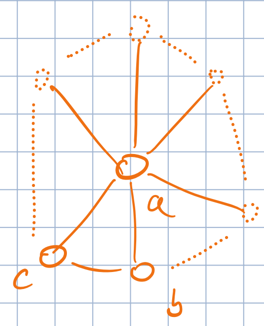


Nejdřív udělám podrozdělování „uch", pak to teprve spojím.

(hrany a,b,c)

④ Mějme G, který je rovinná triangulace a 3-obarvený. Každá 3-stěna je obarvena abc nebo acb.
Dokažte, že obou typů 3-stěn je v G stejné množství.

Pořadí abc nebo acb určí jenom orientaci pořadí obarvení těch bodů okolo.



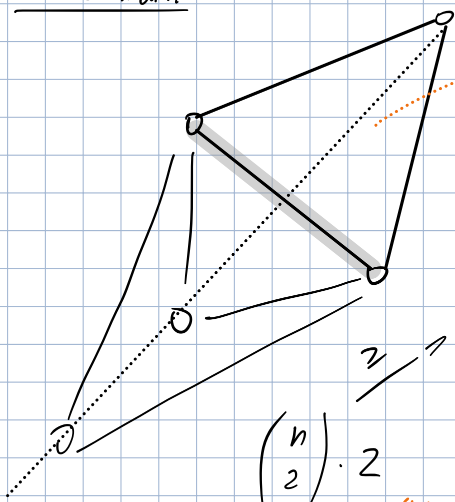
– musí být sudý počet hran z vrcholu, abych to mohl validně obarvit.

Každý vrchol a nevidí na jiný a, tudíž vidí jen na svoje trojúhelníky. Tedy každý trojúhelník vidí na právě 1 bod.

(5) Mějme M množinu s n body v rovině. Dokažte, že pokud jsou v obecné poloze, potom M obsahuje: nejvýše n^2 rovnoramenných trojúhelníků

nejvýše $2n^2/3$ trojúhelníků s obsahem 1.

Rovnoramenné:



všechno na ose je rovnoramenné

$\forall a,b \in M$, obsažen v $\leq 2\ \Delta$

– může tvořit jen 2 základny dvou trojúhelníků

$$\binom{n}{2}\cdot 2 \geq \#(a\,b,\ \triangle) \geq \#\text{r.r.}\Delta$$

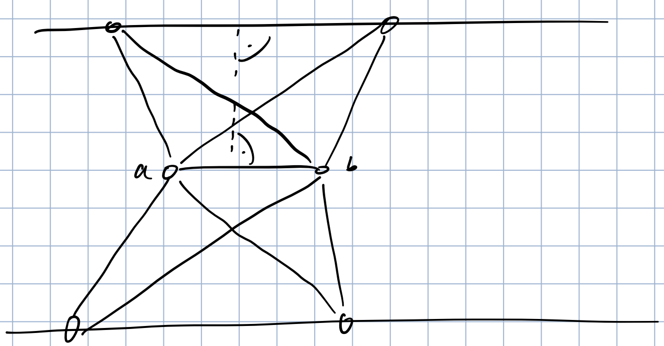
počet hran 2 trojúhelníky max

↳ každý rovnoramenný Δ generuje alespoň 1 tu dvojici

$$n\cdot(n-1) \geq \#\Delta$$

Tady to vážně „dokonči!"

Obsahy:

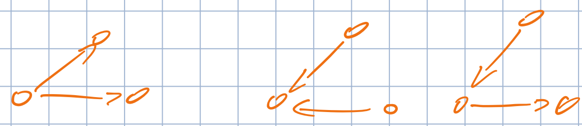


$$\binom{n}{2}\cdot 4 \geq \#(\{a,b\},\ \triangle) = 3\#\Delta$$

$$n^2\frac{2}{3} \geq n\cdot(n-1)\cdot \tfrac{2}{3} \geq \#\Delta$$

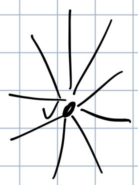
⑥ Mějme úplný graf na n vrcholech. Ukažte, že lib. zorientováním hran bude zhruba nejvýše čtvrtina všech trojúhelníků orientovaným cyklem.

Nápověda: Uvažme orientaci vidliček.



Zajímá nás #
- fixace vrcholu nám dá právě 1 takový Δ. Celkem jsou tam 3.

$$n\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \geq (x,\ x) \geq 3\,\#$$

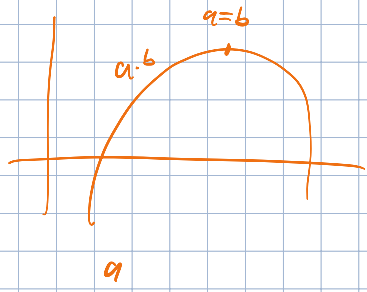


$$\frac{n\cdot(n-1)^2}{12} \geq \#$$

$$\# = \deg^+(v)\cdot\deg^-(v)$$

→ nejvyšší bude součin u nejbližších součtů

$$n-1 = \deg^+(v) + \deg^-(v)$$



$$\text{Celkem } \Delta = \binom{n}{3} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$$

$$\frac{\cancel{n}\cdot\cancel{(n-1)}\cdot(n-1)}{2\cdot\cancel{12}}\cdot\frac{\cancel{6}\ 1}{\cancel{n}\cdot\cancel{(n-1)}\cdot(n-2)} = \frac{n-1}{2\cdot(n-2)} \doteq \frac{1}{2}$$