1) Určete koeficienty u daných mocnin: $(ax+b)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} x^i$

a) $[x^5] : (2x-1)^{-2} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-2}{i} a^i b^{-2-i} \cdot x^i$

Zajímá mě u x^5, tedy $\binom{-2}{5} 2^5 \cdot (-1)^{-7} \cdot x^5 \rightarrow \binom{-2}{5} = \boxed{(-1)^5 \cdot \binom{6}{5}}$

$\rightarrow \binom{6}{5} \cdot 2^5 \cdot \underbrace{(-1)^{-7} \cdot (-1)^5}_{(-1)^{-2} = 1} = \binom{6}{5} \cdot 2^5 = 192$

b) $[x^5] : (1+x)^{-\frac{1}{3}} = \sum_{i=0} \binom{-\frac{1}{3}}{i} x^i$, pro $i = 5$: $(-1)^5 \dfrac{\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot 13}{3^5}}{5!} =$

$= -\dfrac{1\cdot \cancel{4}\cdot 7\cdot \cancel{10}\cdot 13}{3^5} \cdot \dfrac{1}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 1} = -\dfrac{91}{3^6} = -\dfrac{91}{726}$

c) $x \cdot \dfrac{x^2-1}{(1-x)^{\sqrt{3}}} = -x \cdot \dfrac{(1-x)}{(1-x)^{\sqrt{3}}} \cdot (x+1) = -x \cdot (x+1) \cdot (1-x)^{1-\sqrt{3}}$

?

2) Uvažme hod 12 různými 12-stěnnými kostkami. Chceme vyjádřit počet způsobů, jak hodit součet 45.

Pozor, nejde hodit kostkou 0.

$(x + x^2 + \ldots x^{12}) \sim \dfrac{x \cdot (1-x^{12})}{1-x}$

$[x^n] f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{n} [x^i] f(x) \cdot [x^{n-i}] g(x)$

<=> To je ohodnocení, že hodím dané číslo. Koeficient u daného x^n bude vždy odpovídat počtu hodů

Zajímá mě $[x^{45}]$ u $\dfrac{x^{12} \cdot (1-x^{12})^{12}}{(1-x)^{12}}$

Násobím, takže musím sečíst všechny možnosti

$= [x^{33}]$ u $\dfrac{(1-x^{12})^{12}}{(1-x)^{12}} = (1-x^{12})^{12} \cdot (1-x)^{-12} =$

Jelikož mám $1-x^{12}$ tak musím vybírat jen násobky 12, tedy musíš zmenšit

$= \sum_i [x^{12i}] (1-x^{12})^{12} \cdot [x^{33-12i}] \cdot (1-x)^{-12} = \sum_{i}^{\frac{33}{12}} (-1)^i \binom{12}{i} \cdot \binom{45-12i-1}{12-1}$

$12+45-12-12i-1$

3) Spočítejte sumu prvních n lichých čísel pomocí vytvořující funkce

$$(2, 4, 6, 8, \dots) \sim \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$-$$

$$(1, 1, 1, 1, \dots) \sim \frac{1}{1-x}$$

$$(1, 3, 5, 7, \dots) \sim \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)} = \boxed{\frac{x+1}{(1-x^2)}}$$

tady mě zajímá x^{n-1}

tady x^n

Zajímá nás částečný součet, tedy konvoluce s $(1,1,1\dots)$

$$S_n = [x^n]\, \frac{x+1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{(1-x)} = \frac{x+1}{(1-x)^3} = \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^3} = x \cdot (1-x)^{-3} + (1-x)^{-3}$$

$\Leftrightarrow$ pomocí zobecněného komb. čísl.

$$(1-x)^{-n} = \sum_i \binom{n+i-1}{n-1} x^i$$

$$\boxed{S_n = \binom{n+1}{n-1} + \binom{n+2}{n}}$$