3-2: Konstrukce $n-1$ navzájem ortogonálních latinských čtverců:

Použiji větu z přednášky, která říká:

$\exists\ n-1$ NOLČ $\iff$ $\exists$ KPR řádu n.

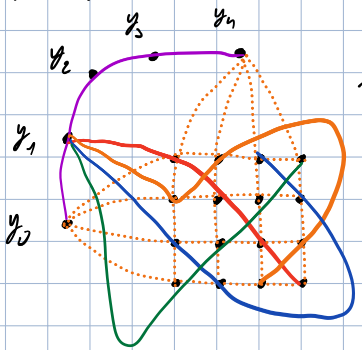
KPR pak lze chápat jako návod na sestrojení takových čtverců:

- to konkrétně tak, že pokud si body KPR reprezentuji do matice $n \times n$ + $n+1$ bodů v okolí, tak vedení jednotlivých přímek v prostoru mi jednoznačně určí jednotlivé čtverce.

Konkrétně pokud $(L_k)_{ij}$ je pozice i,j k-tého LČ, je $(L_k)_{ij} = \ell \iff x_{ij} \in P_{k\ell}$

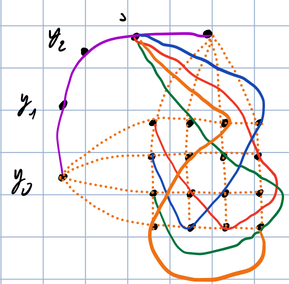
Sestrojení pro $n=4$:

přímky jednoznačně identifikují rozložení



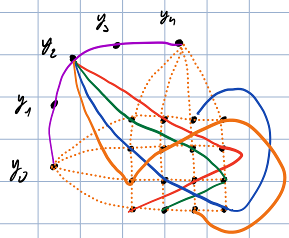
$L_1 =$

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1



$L_3 =$

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2



$L_2 =$

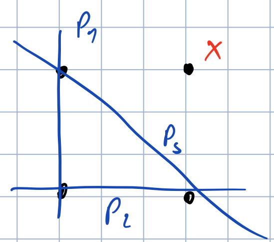
1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

3-1:

1) $(\forall p_1, p_2, p_3 \in P)(\exists x \in X): x \notin p_1 \cup p_2 \cup p_3$, pokud UPR není Fanova rovina.

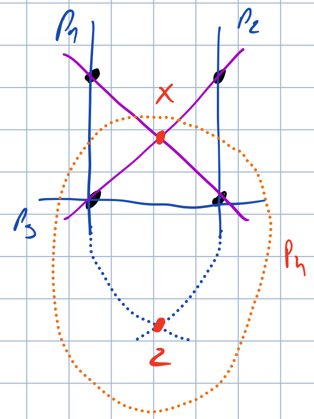
$\Leftrightarrow$ tedy pro UPR řádu > 2

Mějme 4 body v obecné poloze:



Buď přímky p_1, p_2, p_3 nepokrývají všechny body v C, pak jsme již našli bod x.

Nebo přímky všechny body v C pokrývají:



Podle A2 musí existovat z.

Podle A1 ale zároveň musí existovat p_4, p_5

která musí znovu podle A2 tvořit x.

Pak jsme ale pro p_1, p_2, p_3

našli bod x, který není součástí přímek. $\boxtimes$

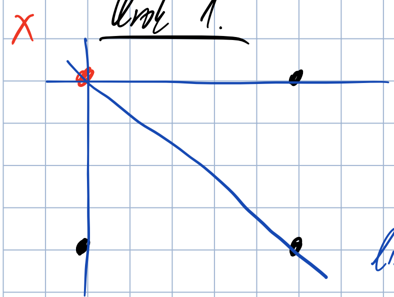
Tato situace má více podob, avšak vždy jsme u řádu > 2 schopni najít obdobným způsobem bod, co neleží ve sjednocení.

Pozn: Vybraný ilustrační příklad může vypadat i jinak. přímky nemusí být takto diagonální, ale na základě A1 musí existovat. A2 pak kdekoliv v prostoru implikuje bod x. Takový bod bude nový, jinak by to byl spor s A1 (právě 1 přímka). Stejně tak bylo vybráno, že p_1, p_2, p_3 zabírají všechny 4 body, což je nejhorší případ.

$(\forall x \in X)(\exists p_1, p_2, p_3 \in P): x \notin p_1 \cup p_2 \cup p_3$, kde přímky jsou navzájem různé.

Jinými slovy libovolný bod nemůže být obsažen ve všech přímkách a existují takové tři, kde $x \notin p_1 \cup p_2 \cup p_3$.

Krok 1.



libovolné přímky

p_1, p_2, p_3

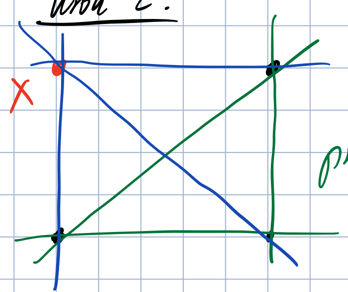
Nechť $x \in$ průnik libovolných tří přímek – nejhorší případ.

Nechť body přímek „určují" C.

Pak musí existovat přímky p_1, p_2, p_3

na základě A1 a A3, kde $x \notin p_1 \cup p_2 \cup p_3$.

Krok 2.



přímky p_1, p_2, p_3

3 – 3: Pozn: Pro všechny případy (např.: ≤ 1) vynechávám případy $=1$ (pokud $=1$ pro A1, A2) jelikož to platí z definice.

(A1) $\forall x \neq y \in \mathcal{X}$, existuje **právě** jedna přímka $p \in \mathcal{P}$ t.ž. $x, y \in p$.

(A2) $\forall p \neq q \in \mathcal{P}$, existuje **právě** jeden bod $x \in \mathcal{X}$ t.ž. $x \in p \cap q$.

A1' = nanejvýš jedna   A2' = nanejvýš jeden

A1'' = alespoň jedna   A2'' = alespoň jeden

A1, A2':

A2' nám dovoluje žádný průsečík libovolných přímek. Uvažme tedy nulový průnik. Pak ale pokud jsou body na více než jedné přímce, musí podle A1 mezi takovými dvojicemi bodů existovat přímka. Pak ale musí existovat mezi takovými přímkami průsečík. My jsme ale předpokládali, že průsečík neexistuje. Tedy spor.

A1, A2'':

Pokud platí A2'', existuje přímka s více než jedním průsečíkem mezi sebou. Pak ale mezi těmito dvěma průsečíky existuje více než jedna přímka, což je spor s A1.

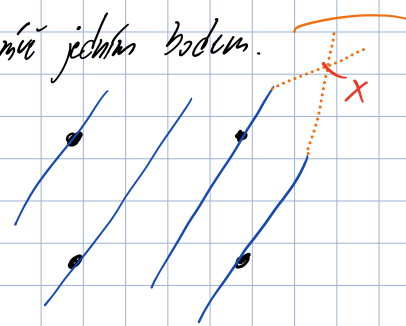
A1', A2:

tedy z ≤ 1 vybírám $< 1 \Rightarrow 0$

Podle A1': Předpokládejme $\forall x \neq y \in X, \nexists p \in P: x, y \in p$.

Teoreticky vznikne množina, ve které budou jen samé body bez přímek nebo přímky s právě jedním bodem. $\to$ v C.

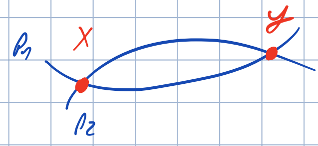
nebo



Pak A2: Pro první případ platí A2 triviálně (žádná přímka neexistuje) a pro druhý případ podle A2 musí existovat X pro každou dvojici přímek, avšak to by znamenalo, že existuje dvojice bodů na stejné přímce, což je spor s naším předpokladem

A1'', A2:

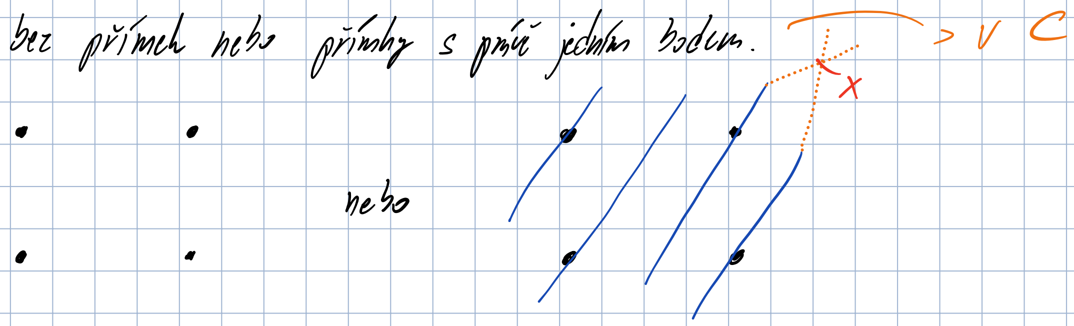
Přímý spor: podle A1'' může existovat např.:



tedy existuje více přímek procházející dvojicí bodů. Pak ale tyto (alespoň dvě) přímky mají více než 1 společný průsečík $|p_1 \cap p_2| > 1$, což je spor s A2.

A1', A2':

Podle A1': Teoreticky vznikne množina, ve které budou jen samé body bez přímek nebo přímky s právě jedním bodem.



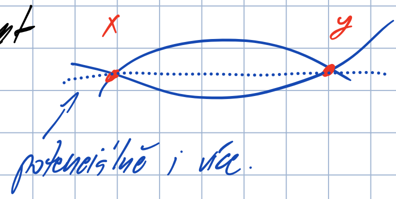
Pak A2':

Bude platit v návaznosti na A1', A2. Tam potřebujeme dovolit, že v případě $(\forall x \neq y \in X)(\nexists p \in P): x, y \in p$, platí:

$\forall p_1 \neq p_2 \in P$ existuje nejvýše jeden průsečík. Tedy explicitně nemusí existovat žádný bod x jako průsečík přímek, který by rozbil předpoklad v A1'. Zároveň bude platit A3, jelikož $\forall p \in P: |p \cap C| \leq 1 < 2$

A1'', A2':

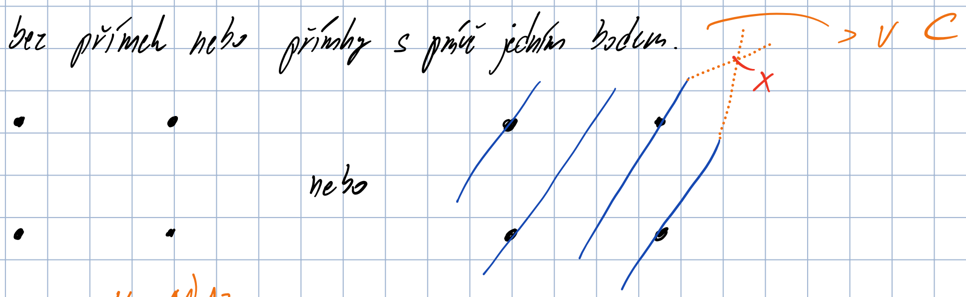
Přímý spor podobně jako u A1'', A2. Může existovat



Pak ale stále pro A2' mám, že průsečík těchto přímek > 1 pro počet přímek > 1. Tedy opět spor.

A1', A2'':

Podle A1': Teoreticky vezmu množinu, ve které budou jen samé body bez přímek nebo přímky s právě jedním bodem.



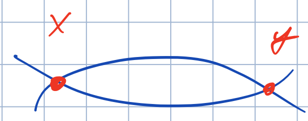
Pak A2'':

Opět nemůže (podle A1', A2) platit, jelikož A1' vyžaduje i žádné dvojice na přímkách. Potom ale nemůže být splněna podmínka, že

$\forall p_1 \neq p_2 \in P \quad |p_1 \cap p_2| \geq 1 > 0$.

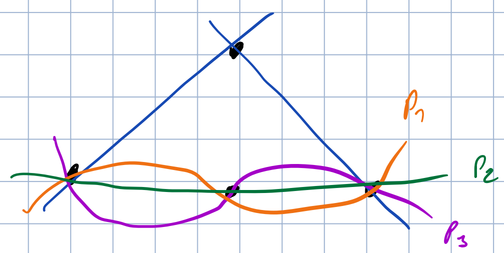
A1'', A2'':

Opět mějme více přímek procházející dvěma body:



Pak A2'' vyžaduje, že průnik těchto přímek bude alespoň 1 velký. Což A2'' dovoluje. Je tedy potřeba ověřit A3. Nechť jsou tyto body $\in C$.

Potom by mohla existovat podle A1'', A2'' následující rovina:



Pak ale pro p_1, p_2, p_3 platí: $\forall p \in \{p_1, p_2, p_3\}: |p \cap C| > 2$.
Což je spor s A3.