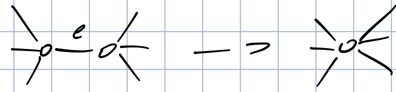
Úkol 4-1: Rozhodněte a dokažte jak se změní hranová a vrcholová souvislost grafu pokud kontrahujeme jednu z jeho hran. Tedy rozhodněte zda může zůstat stejná, klesnou, vzrůst, a zároveň jestli o 1 nebo o libovolnou hodnotu.
(Pro konzistenci uvažme pouze prosté grafy a kontrakce hran které nejsou součást trojúhelníku. Pokud ovšem opravdu chcete, můžete dokazovat i variantu se zachováváním násobných hran a smyček.)

Kontrakce hrany e: 

a) Hranová souvislost: Nechť $G := (V,E)$, e hrana pro kontrakci.

Nechť F je min. hranový řez v G.

Mohou nastat 2 případy:

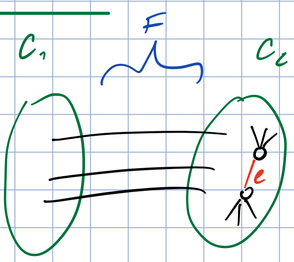
– $e \in F$ nebo $e \notin F$.

V prostém grafu kontrakce hrany nenarušuje spojitost.

Nechť $e \notin F$:

Pak se hranová souvislost nezmění, protože žádná z hran řezu F nebude dotčena:

Důkaz:



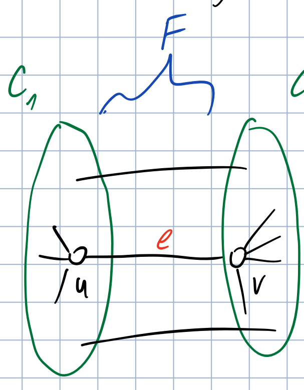
Pokud $e \notin F$, pak BÚNO je v C_2 komponentě.

1. Kontrakce hrany souvislost C_2 nenaruší.
   – negeneruje nové „kritické" hrany. (odebrání kritické by vedlo k rozpadu souvislosti)
   $\Rightarrow$ $|F|$ se nemůže snížit (negenerujeme nové minimum)
2. Min. hran. řez F bude stále tvořen stejnými hranami
   – kontrakce hrany e neovlivňuje souvislost na $E(G) \setminus \{e\}$
   – „kritické" hrany $\in$ min. řezu F nebudou pozměněny a stále budou do řezu patřit.
   $\Rightarrow$ $|F|$ se nemůže zvýšit (neovlivníme původní minimum)

Nechť $e \in F$:

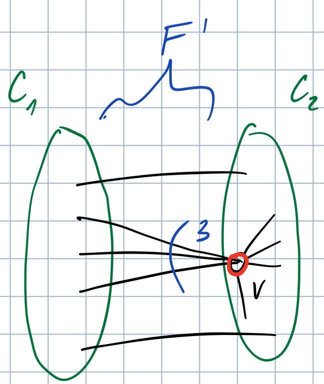
Pak se hranová souvislost nesníží! Nechť $e = \{u,v\}$.

Zvýšit se může až o $\min(\deg(u), \deg(v)) - 1$.

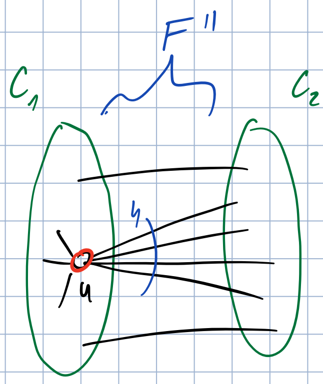


$\deg(u) = 4$

$\deg(v) = 5$



nebo



Nechť (BÚNO) kontrakce nevytváří nový vrchol, ale spojí dva do jednoho na hraně již existujícího.

Pak takový nový vrchol je jistě v nějaké existující komponentě.

Dk: Hranová souvislost se může zvýšit:

Mějme $F :=$ min. hran. řez, který obsahuje kontrahovanou hranu.
Jakmile měl jeden z vrcholů kontrahované hrany stupeň > 1, mohli jsme počet hran v řezu zvýšit o $\deg(v)-1$ (viz. náčrtek).
Nemáme však již zaručeno, že daný řez je minimální.
Víme však, že pokud jiný řez stejné velikosti neexistoval, našli jsme nový, o $\deg(v)-1$ větší. „-1" proto, že jsme zároveň zahodili kontrahovanou hranu. ☒

Dk: Hranová souvislost se nesníží.

Nechť F je min. hran. řez, $e \in F$, e kontrahujeme.
Jelikož je F min., můžou existovat jen jiné řezy stejné velikosti.
Pokud by kontrakce zvýšila velikost daného řezu, stane se minimálním řezem jiný řez původní velikosti.
Pokud byl však řez dané min. vel. jediný, nově se velikost zvýšila alespoň o 1, nejvíce o $\min(\deg(u), \deg(v))-1$, kde $e = \{u,v\}$ kontrahovaná. Rozhodně se ale nemohl snížit. ☒

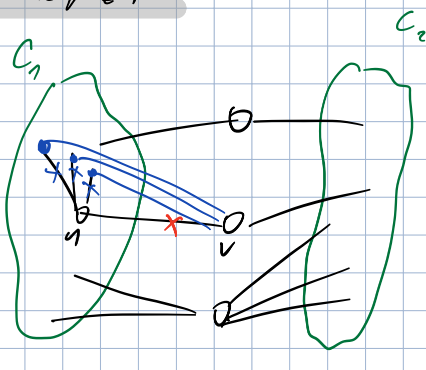
Po kontrakci hrany se nezvětší souvislost a do řezu se „přidává" $\min(\deg(u),\deg(v))-1$ hran. Tedy i v případě $\deg(v)=\deg(u)=0$ je změna 0.

Vrcholová souvislost:

Mohou nastat 3 případy: Nechť e je kontrahovaná hrana (u,v), F min. vrch. řez.

a) u XOR $v \in F$, b) u AND $v \notin F$. c) u AND $v \in F$

Nechť u XOR $v \in F$:

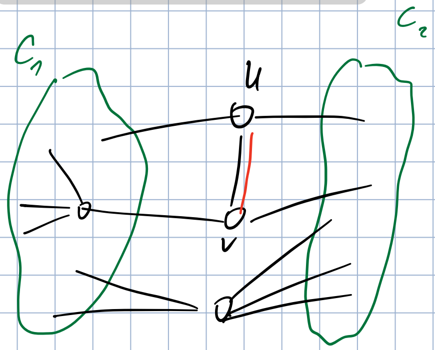


Pak vrcholová souvislost zůstává stejná.

Můžu si představit, že jsem spojil krajní body hrany e do jednoho. Pak vzhledem k vrch. souvislosti se odebrání takového nového vrcholu chová stejně jako odebrání původního.

Resp. původní vrchol z řezu jsem nahradil jiným a připojil do něj hrany z krajů kontrahované hrany. Fakticky jsem tak počet vrcholů v min. řezu nezměnil, pouze mezi nějakými „přepojil" více hran.

Nechť u AND v ∈ F:

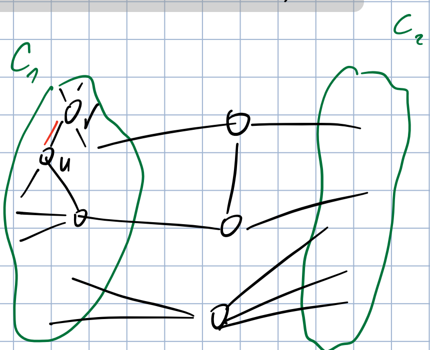


Pak se vrch. souvislost musela snížit právě o 1. Souvislost jsem nepomohl, ale spojením dvou vrcholů do jednoho jsem přenesl „udržení souvislosti" ze 2 vrcholů na 1. Řez jsem tedy rozhodně snížil.

Platí, že všechny hrany stále půjdou do vrcholu mezi komponentami, avšak pouze počet vrcholů se o 1 sníží. Nemůže se snížit o víc, jelikož kontrakce vždy ubere jen právě 1 vrchol! Zároveň se vrch. souv. nemůže zvýšit, protože ponechání min. řez stále řezem, jen o menším počtu vrcholů, tudíž nejde, aby stoupl.

Zároveň pokud byl původní řez F min., rozhodně bude řez o 1 menší v grafu minimální.

Nechť u AND v ∉ F:



Pak taková kontrakce neovlivní min. vrch. řez, protože na něm není vůbec obsažena. Aby se min. řez změnil, musela by taková kontrakce dotvořit hrany do vrch. řezu (což uvnitř komponenty nedělá) nebo by musela vytvořit nový slabší článek grafu (ve smyslu souvislosti), který by byl novým min. vrchol. řezem. To však také nemůže nastat, protože pokud takový body kontrahované hrany nejsou na minimálním řezu, tak jejich odebráním nerozbiju souvislost. Pokud to však platí pro dva body hrany, musí to platit i pro pouze jeden bod, který z takové hrany vznikl.

Úkol 4-2: Dokažte, že ve vrcholově k-souvislém grafu pro každou k-tici vrcholů S existuje kružnice obsahující všechny vrcholy z S.
Vhodnou metodou důkazu je indukce dle počtu vrcholů v S.

Nechť mám množinu S s k vrcholy $x_1 - x_k$. Nechť C je kružnice obsahující nejvýš l vrcholů z S.

Pokud $l = k$, máme hotovo. Jinak $l < k$. Jelikož je G k-souvislé, je i l-souvislé.
Nechť $v_1 - v_l \in C$ a $x \in S \setminus \{C\}$ (tedy mimo kružnici). Pak mohou nastat dva případy:

1) $|C| = l$.

Jelikož $l < k$, tak podle Mengera G obsahuje xv_i cesty pro $i = 1 - l$, pro které všechny dvojice cest mají společný jen bod x. Pak můžu libovolnou hranu mezi dvěma disj. vrcholy z $\{v_1 - v_l\}$ nahradit jejich cestami do x a dostal jsem cyklus velikosti $l+1$ obsahující bod x. ✓

2) $|C| \geq l+1$

Nechť $y \in C \setminus \{S\}$, tedy vrchol na kružnici mimo naši hledanou k-tici. Jelikož $l+1 \leq k$, tak mám opět pro xv_i cesty P_i takové, že každá dvojice má společný jen bod x. Pak pro každou cestu P_i mějme bod z_i, který je prvním bodem z P_i ležící na C. Potom na kružnici C musí existovat cesta P_c z takových dvou bodů $z_i z_j$, $i \neq j$, která neobsahuje žádný bod z množiny S. Pak ale tento segment mohu opět nahradit cestami P_i, P_j, které spojují bod x s kružnicí a neztratím žádný bod z S na C, jelikož cesta P_c, kterou zrušíme, žádný takový neobsahuje. Máme tedy kružnici o velikosti $l+1$ obsahující x. ✓

$\boxed{X}$

Úkol 4-3: Ukažte, že v 3-regulárním grafu jsou hranová a vrcholová souvislost vždy stejné.

(3)

Pak jsem rozhodně mohl jeden vrchol úplně vyřadit.

Obecně vrcholová ≤ hranová ≤ min. stupeň v grafu → vychází z přednášky

Pro 3-reg. ukážu vrcholová ≥ hranová, resp. vrcholová = hranová.

Mějme min. vrcholový řez F, který „dělí" graf na dvě množiny A, B. → díky 3-reg a souvislosti.

Pak každý vrchol takového řezu musí mít alespoň jednoho souseda z A a alespoň jednoho z B.

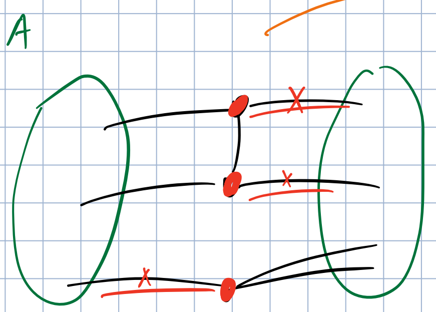
Zároveň ale žádný vrchol nebude mít dva sousedy v A i B zároveň díky 3-reg. (může mít jen 3 hrany).

Pak pokud smažeme každému vrcholu z řezu hranu, která do dané komponenty z vrcholu vede jako jediná (taková musí díky pozorování výše vždy existovat), tak dané smazané hrany rozbijí hranovou souvislost a jsou příkladem min. hranového řezu.

Velikost hranové a vrcholové souvislosti tedy musí být stejná.

→ nebude obsahovat více jak 3 vrcholy díky 3-reg.

Příklad:



hrany z min. hranového řezu.

Jelikož vede z každého vrcholu 3 hrany, je zajištěno, že každý vrchol řezu má pro jednu z komponent pouze 1 hranu, kterou mohu odstranit.

Pokud z vrcholu vedou hrany do obou komponent, BÚNO odstraním tu vpravo. Takové odstranění hran mi však explicitně udává min. hranový řez stejné velikosti co vrcholový. ☒