Úkol 5-1: Mějme množinu n bodů v rovině, v obecné poloze (žádné 3 nejsou kolineární). Dokažte pomocí dvojího počítání, že počet obdélníků s vrcholy v těchto bodech je nejvýše $n^2/8$.

Úkol 5-2: Určete Ramseyovo číslo C_4. Tedy hledáme číslo N takové, že pokud obarvíme hrany K_N dvěma barvami, nutně existuje jednobarevný podgraf C_4; a $R(C_4)$ je nejmenší takové N.
Pro 4 body stačí korektně určit rozmezí 2 hodnot (tzn. určit n_0 t.ž. $n_0 \leq R(C_4) \leq n_0 + 1$).
Hint: zabere třeba bližší analýza důkazu

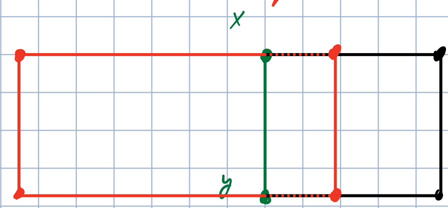
$$R(k, j) \leq R(k-1, j) + R(k, j-1)$$

Úkol 5-3: Systém (různých) množin je polo-nezávislý pokud v něm neexistuje trojice množin A, B, C taková, že $A \subset B \subset C$.
Ukažte, že polo-nezávislý systém podmnožin n-prvkové množiny obsahuje nejvýše $2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ množin.

5-1

Obecná poloha -> žádné tři nejsou na společné přímce.

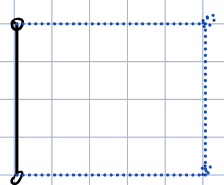
-> červené body porušují obecnou polohu.



1. způsob -> počítání přes počty výběrů hran incidentních s ▭

$\forall x, y \in M$ hranu platí, že díky obecné poloze leží na právě jednom obdélníku. Kdyby byla jedna hrana incidentní s více než jedním obdélníkem, leželo by více než 2 vrcholy na jedné hraně. (viz. nákres)

Tedy pokud mám libovolný výběr hrany $\binom{n}{2}$, tak ten výběr může přispět nejvýše $\frac{1}{4}$ do počtu ▭.



Celkem tedy ▭ může být $\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{n(n-1)}{8} \leq \frac{n^2}{8}$

2. způsob – počítání přes # diagonál

Díky konečnosti množiny vrcholů a poměru hran/diagonál (4 / 2) v obdélníku může být diagonál hledaných obdélníků nejvíce $\binom{\frac{n}{2}}{2}$, jinak bych nebyl schopný podle nich vytvořit všechny ▭: každý ▭ obsahuje 2 diagonály a 4 hrany. Pokud by bylo diagonál více jak $n/2$, nechybělo by mi $n/2$ vrcholů, které tvoří „opačnou" diagonálu. Jelikož ale každý ▭ obsahuje 2 diagonály, musí být celý počet vydělený $\frac{1}{2}$. Zároveň ale platí, že 1 diagonála může indukovat až dva ▭.

Tedy celkem v tom nejhorším případě je $\# ▭ = \binom{\frac{n}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \leq \frac{n^2}{8}$

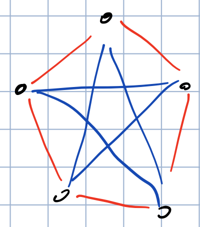
Oběma způsoby jsem ukázal, že počet ▭ bude nejvýše $\frac{n^2}{8}$.

Úkol 5-2: Určete Ramseyovo číslo C_4. Tedy hledáme číslo N takové, že pokud obarvíme hrany K_N dvěma barvami, nutně existuje jednobarevný podgraf C_4; a $R(C_4)$ je nejmenší takové N.
Pro 4 body stačí korektně určit rozmezí 2 hodnot (tzn. určit n_0 t.ž. $n_0 \le R(C_4) \le n_0 + 1$).
Hint: zabere třeba bližší analýza důkazu

$$R(k,j) \le R(k-1,j) + R(k,j-1)$$

5.2 — $R(C_4, C_4) = ??$

Podle „party se 6 lidmi" víme, že $R(3,3) = 6$, tedy $R(K_3, K_3) = R(C_3, C_3)$, protože speciálně $K_3 = C_3$. Uvažme zároveň K_5:

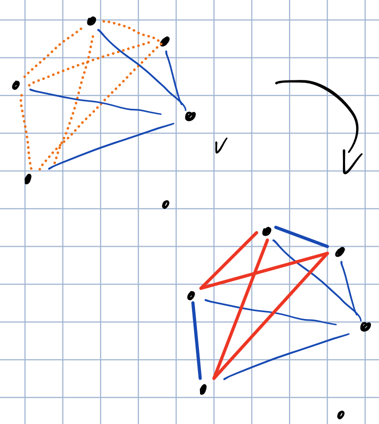


Pokud obarvím jeden cyklus $\in K_5$ červeně, dostanu druhý modře, oba C_5. Tedy určitě $R(C_4, C_4) > 5$.

Víme, že $R(C_4, C_4) > 5$. Nyní nechť $v \in K_6$

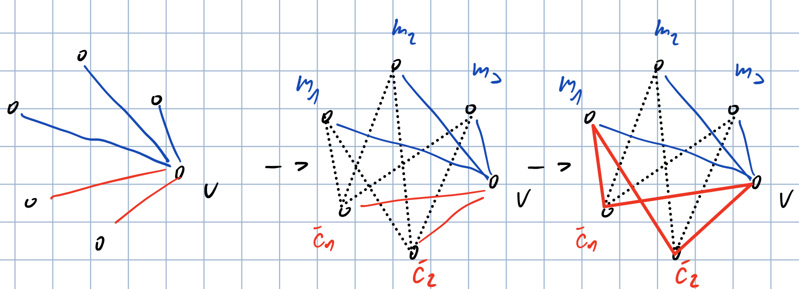
Pak má v právě 5 sousedů. Můžou nastat následující případy:

Případ A: v má alespoň 4 hrany (BÚNO) modré. Pak je situace následující:



Mezi spojenými vrcholy $\exists$ podgraf $\sim K_4$.
Pak pokud jsou nějaké dvě sousední hrany z K_4 modré, tak společně s hranami vedoucími z v tvoří modrou C_4.
Pokud tam nejsou, tak existují nejvýše 2 modré hrany v K_4, tudíž tam musí existovat na zbytku K_4 červená C_4. ✓

Případ B: v má 3 modré a 2 červené hrany:
Pak vezmu $\{\text{modré}, \text{červené}\} \setminus \{v\}$ a podle jejich obarvení z nich udělám úplný bipartitní graf $K_{3,2}$:



Pak pokud $K_{2,3}$ obarvím tak, že m_1 bude ležet na 2 červených hranách, získal jsem červený C_4, stejně pokud by $č_1$ leželo na 2 modrých hranách, tak mám modrý C_4.

Pokud by se však stalo, že nemůžu přímo dvě hrany do $č_i/m_i$ obarvit inverzní barvou, tedy vždy pokud přijdu jednou barvou do vrcholu, tak z vrcholu vyjdu druhou barvou:

tak pak díky tomu, že to je $K_{2,3}$, vždy najdu podgraf $\sim C_4$ monobarevný. Tedy $R(C_4) = 6$.