Odhad faktoriálu:

Substituční šifra -> to je vlastně jako $26!$, když mám obyč. luštění.

<-> Tedy každá je permutací na té abecedě

$$n^{\frac{n}{2}} \le n! \le n^n \qquad n! = \prod_{i=1}^{n} i \le \prod_{i=1}^{n} n = n^n$$

Uvážíme $\forall i: 2, \dots, n-1 : i\cdot(n+1-i) \ge n$: menší z činitelů ≥ 2, větší z činitelů $\ge \frac{n}{2}$

$$(n!)^2 = 1\cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

} každá dvojice součinů je $\ge n^n$ -> je jich n.

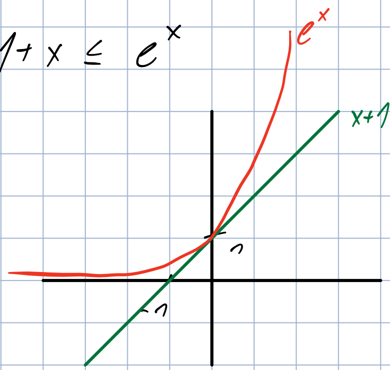
čili $\sqrt{(n!)^2} \ge \sqrt{n^n}$

$$n! \ge n^{\frac{n}{2}} \qquad \boxed{\times}$$

Stirlingova formule: odhad faktoriálu:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: 1+x \le e^x$$



Věta: $\forall n \ge 1$: $$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le en\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Indukcí:

horní odhad:

$n = 1$ ✓

$n \to n+1$

$$n! = n\cdot(n-1)! \le n\cdot e(n-1)\cdot\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} = n\cdot e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\cdot e$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot e \le \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n\cdot e = e^{-1}\cdot e = 1$$

$x = -\frac{1}{n}$

Takže tohle musí být ≤ 1

Protože $n-1$ kusů musí být menší jak n tý.

dolní mez:

$$n! = \dots \ge e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\cdot e$$

Ukázat, že je ≥ 1.

To je $e \Longrightarrow \frac{1}{e}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \le 1 \quad \dots \frac{1}{e}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} =$

$$\le \frac{1}{e}\left(e^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}\cdot e = \underline{\underline{1}}$$

Odhad kombinačního čísla $\binom{n}{k}$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

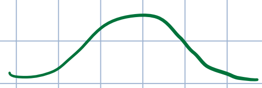
pokud $k \ll n$ $\quad \binom{n}{k} \simeq n^k$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{k}$$

≥ 1 pro $k \le \frac{n}{2}$

≤ 1 pro $k \ge \frac{n}{2}$

$\Downarrow$



Zajímá nás odhad toho největšího čísla,

tedy $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ nebo $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

Víme: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \Rightarrow \binom{n}{\frac{n}{2}} \le 2^n$

$\Downarrow$ $\binom{n}{\frac{n}{2}} \ge \frac{1}{n+1}2^n$

Odhad $\binom{n}{k}$: $\quad \left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le n^k$

Dk: $\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{n-i}{k-i}$ $\quad \frac{n-i}{k-i} \le n \;..\; \binom{n}{k} \le n^k$

$\frac{n-i}{k-i} \ge \frac{n}{k}$ pro $i = 1..k-1 \;..\; \binom{n}{k} \ge \left(\frac{n}{k}\right)^k$

Věta: Pro $\forall m \ge 1$: $\quad \frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \le \binom{2m}{m} \le \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$

$\frac{(2m)!}{m!\cdot m!}$

Označme:

$$P = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m} = \frac{(2m)!}{m!\cdot m!\,2^{2m}} = \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}}$$

Cíl: $\frac{1}{2\sqrt{m}} \le P \le \frac{1}{\sqrt{2m}}$

Horní odhad:

$$1 > \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(2m)^2}\right) = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2m-1)\cdot(2m+1)}{2m\cdot 2m} =$$

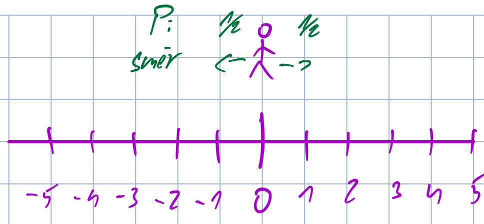
$$= P^2\cdot(2m+1) \Rightarrow P < \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \le \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

Dolní odhad:

$$1 > \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(2m-1)^2}\right) = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2m-2)\cdot 2m}{(2m-1)\cdot(2m-1)} = \frac{1}{2\cdot 2m\cdot P^2}$$

$$\Rightarrow P > \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

Náhodná procházka:



Otázka: Kolikrát se v průměru vrátíme do počátku.

Z, což je součet indikátorů, jestli jsem se vrátil, což jde pouze v sudých krocích.

$$X = I_{A_2} + I_{A_4} + \ldots + I_{A_{2n}}$$

A_{2n} … jev, že jsem se vrátil do počátku.

$$P(A_{2n}) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Celkový průměrný počet návratů je střední hodnota tohohle:

$$EX = EI_{A_2} + EI_{A_4} + \ldots$$

<= Jelikož je to ale jenom 0/1, ten jev, tak E je ta pravděpodobnost

$$EX = P(A_2) + P(A_4) + \ldots + \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$ --> je divergentní => jde do nekonečna!

Tzn. že počet návratů je nekonečný.

Dokud by šlo o 2D mřížku, náhodná procházka se i tak nekonečněkrát vrací do počátku.

U 3D mřížky už je konečný. Tam už je jen nějaká šance že se vrátím do stejného místa.