Df: Nezávislost systému: Systém $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,n\}}$ je nezávislý, pokud $\forall A,B \in \mathcal{M},\ A \neq B : A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A$

Věta: Spernerova: Každý nezávislý systém $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,n\}}$ má $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ prvků a je to těsné.

Alternativně: Nejdelší antiřetězec v část. uspoř. množině $(2^{\{1,\dots,n\}}, \subseteq)$ má $\leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ prvků.

Dk:

1) Dolní odhad: Systém množin $\{M \subseteq \{1,\dots,n\} : |M| = \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ je nezávislý.

Evidentně má $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ prvků

2) Horní odhad: Mějme $\mathcal{M} \subseteq 2^{\{1,\dots,n\}}$ nezávislý. Chceme $|\mathcal{M}| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

2 způsoby:

$$z = \left| \left\{ (\check{R}, M),\ \begin{matrix} \check{R} := \text{max. řetězec} \\ M := \text{množina nez. systému} \end{matrix} : M \in \mathcal{M} \right\} \right|$$

Max. řetězec $\check{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_n\}$, kde $\emptyset = R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_n = \{1,\dots,n\}$,

$|R_{i+1} \setminus R_i| = 1$

1. způsob: (fixuji $\check{R}$) $\mathcal{M}$ je nezávislý, tudíž se tam nemůže nic opakovat víckrát

Pro $\check{R}$ máme ≤ 1 množinu $M \in \mathcal{M}$, t.ž. $M \in \check{R}$

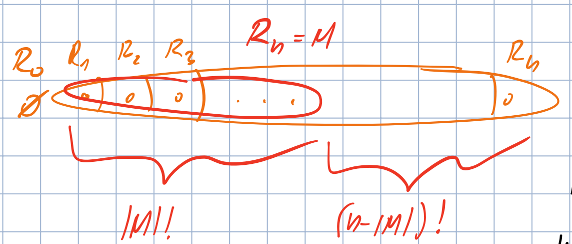
$\#M: |\check{R} \cap \mathcal{M}| \leq 1 \quad \forall \check{R}$

#řetězců: stačí vybrat pořadí prvků z $\{1,\dots,n\}$, ve kterém rozšiřujeme $\check{R}$.

$$\Rightarrow \quad z \leq \underset{\#M}{1} \cdot \underset{\#\text{řetězců}}{n!} \quad \leq n!$$

2. způsob: (fixuji M):

Pro $M \in \mathcal{M}$ máme $|M|!\,(n-|M|)!$ max. řetězců, které obsahují M.



M dostanu po M krocích.

$|M|!$ způsoby to můžu vybrat

$(n-|M|)!$ způsoby můžu vybrat zbytek

$$z = \sum_{M \in \mathcal{M}} |M|! \cdot (n-|M|)!.$$

$$n! \geq z = \sum_{M \in \mathcal{M}} |M|! \cdot (n-|M|)! \qquad \Big/ \frac{1}{n!}$$

$$1 \geq \sum_{M \in \mathcal{M}} \frac{|M|! \cdot (n-|M|)!}{n!} = \binom{n}{|M|}^{-1} \geq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{-1}$$

→ tohle bude vždy největší počet

$$1 \geq \sum_{M \in \mathcal{M}} \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{-1} = |\mathcal{M}| \cdot \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{-1} \Rightarrow \boxed{|\mathcal{M}| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}$$

→ vynásobení $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

Ramseyova teorie

(Dirichletův princip) → Princip holubníku

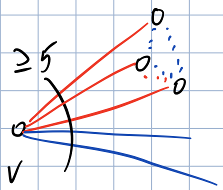
Věta: $\forall r, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$, $\forall$ r-obarvení množiny X : $|X| \geq D(n_1, \dots, n_r, r) = 1 + \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1) \Rightarrow$
$\exists i \in \{1, \dots, r\}$ t.ž. X obsahuje n_i prvků barvy i.

Dk: Algebraicky podle počtu barev a velikosti $|X|$

Na párty ≥ 6 lidí $\exists$ 3 lidi, kteří se navzájem znají, nebo neznají.

$\forall$ 2-obarvení $E(K_n)$, $n \geq 6$, $\exists$ 1-barevné K_3.

Zafixujme $v \in V(K_n)$:



Dirichletův princip ⇒ $\exists$ 3 hrany z v stejné barvy

Buď tam je nějaká červená mezi třemi červenými vrcholy, nebo tam musí být modrá a to v celém novém trojúhelníku.

$k, l \in \mathbb{N}$, Ramseyovo číslo $R(k,l) = \min. N \in \mathbb{N}$: $\forall$ červeno-modré obarvení $E(K_N)$ obsahuje červený K_k nebo modrý K_l

Věta: Ramseyova pro grafy: $\forall k, l \in \mathbb{N}$: $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1} = \binom{k+l-2}{l-1}$

Dk: Indukcí podle $k+l$:

Pokud $k = 1 \vee l = 1$: tak hotovo ⇒ $R(k,l) = 1$ ✓

Nechť $k, l \geq 2$, nechť platí IP. $\left(R(k-1, l) \leq \binom{k+l-3}{k-2}, R(k, l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-1} \right)$

Ukážeme, že $R(k,l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1)$

Zafixujme $v \in V(K_n)$: $n = R(k-1,l) + R(k,l-1)$, v má $n-1$ sousedů,

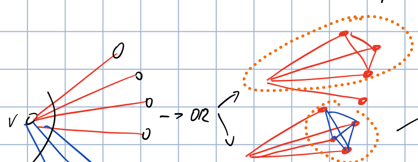
$$n \geq \underbrace{\left(R(k-1,l) - 1\right)}_{n_1 - 1} + \underbrace{\left(R(k,l-1) - 1\right)}_{n_2 - 1} + 1 + 1$$

za vrchol v

→ Dirichletova věta: existuje buď $\geq n_1 - 1$ prvků s v spojených červeně nebo $\geq n_2 - 1$ spojených modře

⇒ Buď máme $\geq R(k-1, l)$ červených sousedů nebo $\geq R(k, l-1)$ modrých sousedů

BÚNO nastalo $R(k-1, l)$



Tohle obsahuje červený K_{k-1}, společně s v máme K_k

Tohle obsahuje modré K_l

Buď tam je K_l, máme hotovo, nebo máme červené K_{k-1}. – rozšíříme na červené K_k vrcholem v ☒

$$\Rightarrow R(k,l) \leq R(k-1,l) + R(k,l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1}$$

$\Rightarrow R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq 4^k$

Věta: Dolní odhad Ramseyova čísla: $\forall k \geq 3: R(k,k) \geq 2^{k/2}$

Dk: (pravděpodobnostní technika)

Mějme $N < 2^{k/2}$. Ukážeme, že pak takové obarvení existuje bez kliky velikosti k.

Buď $\chi: E(K_N) \to \{$červenou, modrou$\}$, kde $\chi(e) = \begin{cases} \text{červená} & \text{s pstí } 1/2 \\ \text{modrá} & \text{s pstí } 1/2 \end{cases}$ nezávisle.

Chceme $P = P[\text{v } \chi\ \exists \text{ 1-barevný } K_k] < 1$

- potom automaticky víme, že $R(k,k) > N$

$\forall K \in \binom{V(K_n)}{k}$ buď A_K jev „K indukuje 1-barevný K_k".

k-tice vrcholů

$P[A_k] = \underbrace{2}_{\text{dvě barvy}}{}^{1-\binom{k}{2}}$ $\to P[\text{na } k \text{ jsou } \forall \text{ hrany černé}] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$

$\Leftrightarrow$ stejné pro modré

$2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$

$2^{1-\binom{k}{2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$

$\to$ union bound

$$P \leq \sum_{K \in \binom{V(K_n)}{k}} P[A_k] = \sum_{K \in \binom{V(K_n)}{k}} 2^{1-\binom{k}{2}} = \binom{N}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{N^k}{\cancel{2^{k/2+1}}} \cdot 2^{-\frac{k^2}{2} + \cancel{\frac{k}{2} + 1}}$$

$\binom{N}{k} \leq \frac{N^k}{k!} \leq \frac{N^k}{2^{k/2+1}}$ ($k \geq 3$)

$$= N^k \cdot 2^{-k^2/2} < 1$$

$N < 2^{k/2}$

$\boxed{\times}$