Zobecnění Ramseyovských čísel:

$P, r, \underbrace{n_1, \ldots, n_r}_{\text{velikost 1-barevných podstruktur}} \in \mathbb{N}$

barvíme p-tice; r barvami

Df: $R_p(n_1, \ldots, n_r)$ je min. $N \in \mathbb{N}$ t.ž. $\forall X, |X| \geq |N|$ $\forall$ r-obarvení χ množiny $\binom{X}{p}$
$\exists i \in \{1..n\}$ $\exists Y \subseteq X$ t.ž. $|Y| = n$ a
$\forall$ p-tice $\in \binom{Y}{p}$ mají barvu i.

Věta: Ramseyova věta pro p-tice

$\forall r, P, n_1 \ldots n_r : R_p(n_1, \ldots, n_r)$ je konečné.

Dk:
(Dokážeme ho: indukcí podle p a $n_1 + \ldots + n_r$) Uvažujeme to na úplném hypergrafu.

Mějme N dost velké a χ r-obarvení $\binom{X}{p}$, kde $|X| \geq N$.

Začátek indukce:

$p = 1$ —> Dirichletův princip ✓

$p \geq 2$, $\exists n_i : n_i = 1$ —> triviální, stačí nastavit $N = 1$. (pak žádné hrany nemáme, tudíž nebarvím).

Indukční krok:

$p \geq 2$, $\forall i : n_i \geq 2$, nechť tvrzení platí pro $p-1$ a libovolné $n_1', \ldots, n_r'$
p a $n_1'', \ldots, n_r''$, kde $\sum_i n_i'' < \sum_i n_i$

pro $i = 1..r$ zvolme $m_i = R_p(n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots, n_r)$.

Nechť $N \geq 1 + R_{p-1}(m_1, \ldots, m_r)$ —> tohle je nepředstavitelně velké číslo, stále ale konečné $\mathbb{N}$.

Zvolme lib. $v \in X$. Buď χ' r-obarvení p-1-tic nad $\binom{X \setminus \{v\}}{p-1}$,
kde pro $P \in \binom{X \setminus \{v\}}{p-1}$ je $\chi'(P) = \chi(P \cup \{v\})$

—> barvím sousedství vrcholu

Podle IP pro $p-1, m_1 \ldots m_r$ $\exists X' \subseteq X$ t.ž. $\exists j \in \{1..r\} : |X'| = m_j$ AND
$\forall$ p-1-tice z $\binom{X}{p-1}$ mají v χ' barvu j.

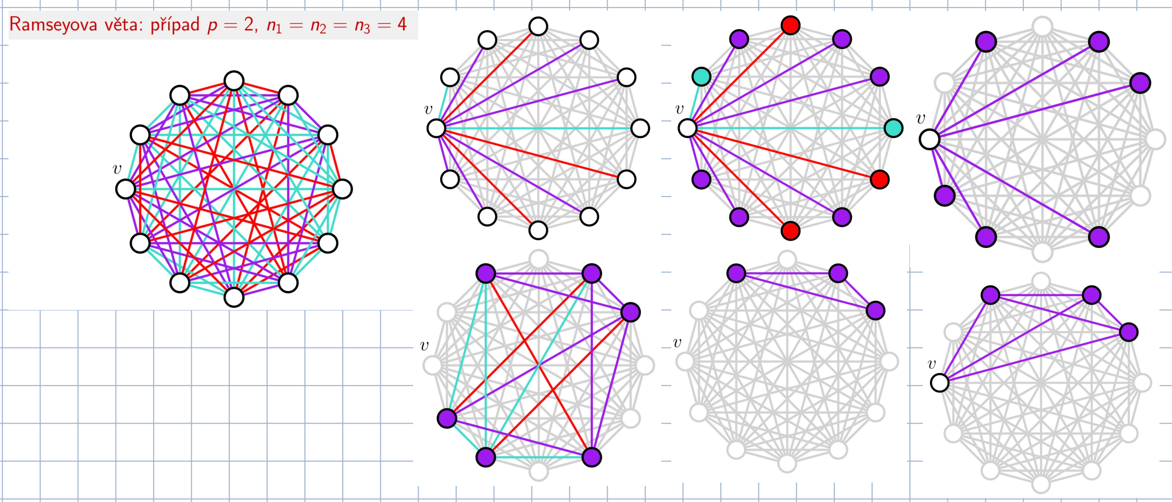
Podle IP pro $p, n_1 \ldots n_j - 1, n_r$ $\exists Y \subseteq X'$ $\exists i \in \{1..r\} : |Y| = \begin{cases} n_i & i \neq j \\ n_j - 1 & i = j \end{cases}$

$\forall$ p-tice z $\binom{Y}{p}$ mají v χ barvu i.

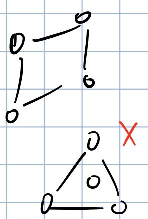
$\Rightarrow$ Pokud $i \neq j$, jsme hotovi. $\to$ našli jsme již dostatečně velkou kliku.

Jinak $i = j$. $\to$ jsme ale v sousedství jednoho obarvení, tzn:

$Y \cup \{v\}$ má všechny p-tice barvy i. $\boxed{\times}$



Aplikace -



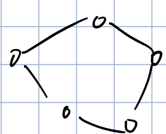
✓ P - množina bodů v $\mathbb{R}^2$.

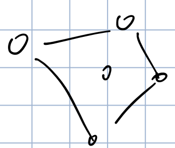
P je v obecné poloze, pokud $\nexists$ 3 body z P leží na přímce

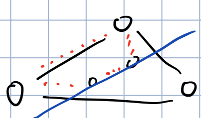
✗ v konvexní poloze, pokud P tvoří vrcholy konvexního mnohoúhelníku.

Lemma: $\forall$ množina 5 bodů v $\mathbb{R}^2$ v obecné poloze obsahuje 4 body v konvexní poloze.

Dk: Stačí uvážit 3 případy:

1)  - pokud mám body na konvexním obalu, všechny 4-ce fungují.

2)  - pokud jen 4 na konvexním obalu, jeden uvnitř, tedy mám 4 vrcholy v konvexní poloze.

3)  přímka přes vnitřní body

- 2 hrany, které neprotla, si vezmu dva body $\Big\}$ díky obecné poloze.

$\boxed{\times}$

Věta: Erdősova-Szekeresova:

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists ES(k) \in \mathbb{N}\ \forall$ množina $\geq ES(k)$ bodů v $\mathbb{R}^2$ v obecné poloze obsahuje k bodů v konvexní poloze.

Dk:

Ukážeme $ES(k) \leq R_4(k,5)$.

Mějme P velikosti $\geq R_4(k,5)$. Buď χ 2-obarvení $\binom{P}{4}$, kde $\forall c \in \binom{P}{4}: \chi(c) = \begin{cases} \text{červená} & \text{je v konv. poloze} \\ \text{modrá} & \text{není v konv. poloze} \end{cases}$

Podle Ramseyovy věty pro 4-ce $\Rightarrow \exists Q \subseteq P$ t.ž. $|Q| = 5$ a každá 4-ce z Q je modrá

podle lemma tohle nenastane

nebo $|Q| = k$ a každá k-ce z Q je červená

pak hotovo $\rightarrow$ když mám každou 4-ci v konvexní poloze, mám i množinu v konvex. poloze.

Věta Nekonečná Ramseyova věta:

opět barvíme p-tice r barvami

$\forall p, r \in \mathbb{N},\ \forall r$-obarvení χ množiny $\binom{\mathbb{N}}{p}\ \exists$ nekonečná $A \subseteq \mathbb{N}$ t.ž. $\forall z \in \binom{A}{p}$ mají stejnou barvu v χ.

– každé nekonečné jednobarevné sousedství indukuje další nekonečnou podmnožinu, to lze dělat donekonečna.

Dk:

Indukcí podle p, $\chi = r$-obarvení $\binom{\mathbb{N}}{p}$

Začátek indukce: $p = 1$ – triviální ✓

Indukční krok:

– zkonstruujeme $\mathbb{N} = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, kde A_i je jednobarevné sousedství.

$A_1 = \mathbb{N}$, nechť máme $A_1, \ldots, A_i$, $i \geq 1$

Buď $v_i = \min(A_i)$. Buď χ_i r-obarvení $\binom{A_i \setminus \{v_i\}}{p-1}$, kde $(p-1)$-tice Q má barvu $\chi_i(Q) = \chi(Q \cup \{v_i\})$

IP $\Rightarrow \exists$ nekonečná $A_{i+1} \subseteq A_i \setminus \{v_i\}$, kde $\forall z \in \binom{A_{i+1}}{p-1}$ mají barvu $b_i \in \chi_i$.

$\Rightarrow$ Dostáváme $v_1, v_2 \ldots$, kde $\forall p$-tice $\{v_{i_1}, \ldots v_{i_p}\}$ má barvu b_{i_1}

$\Leftarrow$ každá p-tice má barvu určenou svým prvním vrcholem.

Buď b barva, která se mezi $b_1, b_2 \ldots$ vyskytla nekonečně krát (barev je jen r, takže taková existuje).

$A = \{v_i : b_i = b\}$. Potom A je nekonečná a $\forall p$tice z $\binom{A}{p}$ má barvu b. $\boxtimes$

Věta: Kőnigovo lemma:

$\forall$ zakořeněný strom s nekonečně vrcholy, ale konečnými stupni vrcholů, obsahuje nekonečnou větev vedoucí z kořene.

- uvažme $n_1 \_ n_r = n$. Sporem předpokládejme, že konečná Rams. věta neplatí, tedy $R_p(\underbrace{n, \ldots, n}_{r})$ je nekonečné.

Tedy $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall M \in \mathbb{N}\ \exists$ r-obarvení χ_M množiny $\binom{\{1, \ldots, M\}}{p}$ t.ž.

$\forall$ podmnožinu $\{1 \ldots M\}$ velikosti n nemá 1-barevné p-tice.

Uvažme strom, kde kořen je $\emptyset$, vrcholy jsou obarvení χ_M

χ_{M+1} je synem jiného obarvení, pokud χ_{M+1} rozšiřuje χ_M.

Všimněme si, že strom je nekonečný na nějaké větvi, přesto má konečně stupňů ve vrcholech. Pak podle Kőnigova lemma existuje nekonečná větev $\chi_0, \chi_1, \ldots$ sami sebe rozšiřující.

Pak $\exists$ r-obarvení $\binom{\mathbb{N}}{p}$, které neobsahuje 1-barevnou podstrukturu velikosti n. $\boxed{\lightning}$

s Nekonečnou Ramseyovou větou

Tedy jsme dokázali Nekonečná $\Rightarrow$ Konečná