Vytvářející funkce:

Máme 3 červené, 4 žluté a 5 zelených míčků. Chci vybrat 7 z nich.

Kolika způsoby lze vybrat? $\underline{17.}$

červené žluté zelené

$$(1+x+x^2+x^3)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)=$$

$$x^{12}+3x^{11}+6x^{10}+10x^9+14x^8+\underline{\underline{17x^7}}+18x^6+17x^5+14x^4+10x^3+6x^2+3x+1.$$

Df: Vytvořující funkce posloupnosti $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ je mocninná řada $a(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

Příklad:

$$a(x)=\begin{cases}1 & i\le n\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}\qquad \underbrace{1,1,1,\dots,1}_{n+1},0\dots$$

$$a(x)=\sum_{i=0}^{n} x^i = 1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$a(x)=1\ \forall i \qquad a(x)=1+x+x^2+\dots=\sum_{i=0}^{\infty} x^i=\frac{1}{1-x}$

Binomická věta

$a(x)=\binom{n}{i} \qquad a(x)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n$

V: Pokud pro posloupnost a_i existuje $k\in\mathbb{R}$ t.ž. $\forall i: |a_i|\le k^i$, potom $\forall x\in\left(-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$: řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje absolutně.

Výsledná funkce $a(x)$ jednoznačně určuje příslušné koeficienty.

$$a_i=\frac{a^{(i)}(0)}{i!}.$$

Operace s vytvořujícími funkcemi:

Součet: $(a_i+b_i)_{i=0}^{\infty} \qquad a(x)+b(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i+\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i=\sum_{i=0}^{\infty}(a_i+b_i)x^i$

Součin $(\alpha a_i)_{i=0}^{\infty} \qquad \alpha\cdot a(x)=\dots\quad \alpha\cdot\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

Posun vpravo: $(0,a_0,a_1,a_2,\dots) \qquad x\cdot a(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1}$

↳ doplnění elementu a posun

Posun vlevo $(a_1,a_2,a_3\dots) \qquad \dfrac{a(x)-a_0}{x}$

Dosazení αx $\quad a(\alpha x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (\alpha x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha^i x^i \qquad (a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2 \dots)$

Dosazení x^2 $\quad a(x^2) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x^2)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{2i} \qquad (a_0, 0, a_1, 0, a_2 \dots)$

→ posun doleva

Derivace $\quad (a(x))' = a'(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot i \cdot x^{i-1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} (j+1) x^j$

$(1a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots)$

Integrál $\quad \int_0^x a(t)\,dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1} \qquad (0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \dots)$

$c(x) = a(x) \cdot b(x) \qquad (c_0, c_1, c_2, c_3, \dots)$

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j \cdot b_{i-j}$$

Df: Pro $r \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}_0^+$ definujeme zobecněné komb. číslo $\binom{r}{k}$

$$\binom{r}{k} = \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1)}{k!}$$

Věta: Funkce $(1+k)^r$ je vytvořující funkce pro posloupnost $\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \dots\right)$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$. a řada $\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$ konverguje.

Taylorův rozvoj $(1+k)^r$ v 0.

$f(x) = (1+x)^r$

$f'(x) = r \cdot (1+x)^{r-1}$

$f''(x) = r \cdot (r-1) (1+x)^{r-2}$

$\vdots$

→ $r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \dots$ to mi dává ty kombinační čísla

$(1+x)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$

Potom:

$(1+x)^i = 1 + \frac{i}{1!}(x-0) + \frac{i \cdot (i-1)}{2!}(x-0)^2 \dots$

$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$

Taylorův rozvoj $f(x)$ v bodě a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Důsledek: Pro $n \in \mathbb{Z} : n < 0$:

→ mám tady i-krát záporný člen

→ zde mám i krát „-1" v závorce

$$(1-x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} (-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-i+1)}{i!} \cdot (-x)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{-n \cdot (-n+1) \cdot (-n+2) \cdot \dots \cdot (-n+i-1)}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n+i-1}{i} x^i$$

Např.: $(1-x)^{-3} = \binom{2}{2} x^0 + \binom{3}{2} x^1 + \binom{4}{2} x^2 \dots$

nyní je tohle obyč. komb. číslo, kde největší číslo v čitateli je vpravo

$$(1-x)^{-n} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n} \overset{\to\ x \in (-1,1)}{=} \underbrace{(1+x+x^2+\dots)\cdot(1+x+x^2+\dots)\cdot(1+x+x^2+\dots)\cdot\ \dots}_{n \text{ krát}} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i$$

Koeficient a_i určuje rozdělení i kuliček (mocnin x) do n přihrádek (příslušných členů).

$$a_i = \binom{n+i-1}{n-1}$$