Aplikace vytvořujících funkcí:

Fibonacciho posloupnost: $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Hledáme $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	$\ldots$	$f(x)$
0	1	f_0+f_1	f_1+f_2	f_2+f_3		
0	1	0	0	0	$\ldots$	x
0	0	f_0	f_1	f_2	$\ldots$	$x^2 \cdot f(x)$
0	~~0~~ f	f_1	f_2	f_3	$\ldots$	$x \cdot f(x)$

Když sečtu všechny, mám horní řádek

$$f(x) = x + x^2 f(x) + x f(x)$$

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2 - x}$$

diferenciální zlomek

$$\frac{x}{1-x^2-x} = \frac{\frac{1}{\sqrt5}}{1-\frac12(1+\sqrt5)x} - \frac{\frac{1}{\sqrt5}}{1-\frac12(1-\sqrt5)x} = \frac{a_1}{1-\lambda_1 x} + \frac{a_2}{1-\lambda_2 x}$$

$a_1 = \frac{1}{\sqrt5}$

$a_2 = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt5}{2}$

$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt5}{2}$

$$(a_1, \lambda_1 a_1, \lambda_1^2 a_1, \lambda_1^3 a_1 \ldots) \quad (a_2, \lambda_2 a_2, \lambda_2^2 a_2 \ldots)$$

i-tý člen součtu těchto posloupností

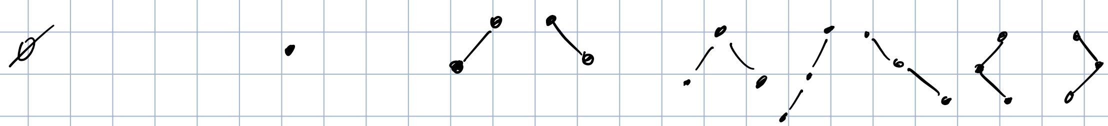
$$f_i = \frac{1}{\sqrt5} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^i - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^i \right)$$

Kolik existuje binárních stromů na n vrcholech?

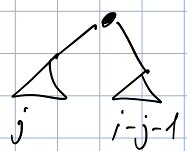
Df: Binární strom je zakořeněný strom, v němž má každý vrchol nejvýše 2 syny.

Označme b_i = # bin. stromů na i vrcholech

$b_0 = 1 \qquad b_1 = 1 \qquad b_2 = 2 \qquad b_3 = 5$



Hledáme vytvořující funkci $b(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ 1



vrcholů

protože musí být i prázdný

(*) $\forall i \geq 1$: $b_i = \underbrace{b_0 \cdot b_{i-1}}_{\substack{\text{levý} = 0 \\ \text{pravý} = i-1}} + \underbrace{b_1 \cdot b_{i-2}}_{\substack{\text{levý} = 1 \\ \text{pravý} = i-2}} + b_2 \cdot b_{i-3} + \dots + b_{i-1} b_0 =$ (*)

(*) je koeficient u x^{i-1} v součinu $b(x) \cdot b(x)$

$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \dots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \dots) =$

$\dots + (b_0 b_{i-1} + b_1 b_{i-2} \dots) x^{i-1} + \dots$

beru člen jedné, zprava druhý, vždy z opačného konce

Co tedy musí splňovat vytvořující funkce $b(x)$?

→ i-tý sloupec reprezentuje koeficient u x^i.

Tabulkou:

b_0	b_1	b_2	b_3	...	$b(x)$
$b_0 b_0$	$b_0 b_1 + b_1 b_0$	$b_0 b_2 + b_1^2 + b_2 b_0$	....		$b(x) \cdot b(x)$
0	b_0^2	$b_0 b_1 + b_1 b_0$	...		$x \cdot (b(x))^2$
1	—‖—				$x \cdot (b(x))^2 + 1$

$$b(x) = x \cdot (b(x))^2 + 1$$

Řešíme kv. rovnici s neznámou $b(x)$ a parametrem x.

$$b(x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x},$$

správná volba je „−", jelikož „+" jde s $\lim_{x \to 0^+} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$

ale $\lim_{x \to 0^+} b(x) = b_0 = 1$ $\boxed{\lightning}$

Víme: $b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, cíl určit b_i.

Podle zobecněné binomické věty: $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot (-4)^k \cdot x^k$

$$\Rightarrow b(x) = \frac{1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4)^k x^k}{2x} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-4)^k \cdot x^{k-1} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{k} \Rightarrow b_i \text{ je koeficient u } x^i \text{, tedy}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (-4)^{i+1} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{i+1}$$

Zjednodušení

$$= b_n = -\frac{1}{2} (-4)^{n+1} \binom{\frac{1}{2}}{n+1} = -\frac{1}{2} (-4)^{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{2} - n)}{(n+1)!} = (-1)^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \cdot (-1)^n \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot (\frac{1}{2} - n)}{(n+1)!} =$$

$n+2$, 4^{n-1}, n „−"

$$= 2^n \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2n-1}{(n+1)!} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)!\, n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!\, n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \rightsquigarrow \text{Catalanovo číslo}$$

Tvrzení: Rozklad čísel na sčítance:

$\forall n \in \mathbb{N}$ lze rozložit na $k \in \mathbb{N}$ kladných uspořádaných sčítanců $\binom{n-1}{k-1}$ způsoby.

– umisťujeme $k-1$ hradel mezi $n-1$ prvků: $3+1$, $2+2$, $1+3$

$\circ\circ\circ|\circ \quad \circ\circ|\circ\circ \quad \circ|\circ\circ\circ$

Počet c_n uspořádaných rozkladů na n kladných sčítanců je roven

$$c_n = \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} = 2^{n-1}$$

→ Binomická věta

$$\Rightarrow C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{1-x}{1-2x}$$

dosazení $2x$, posun vpravo, přičtení $+1$

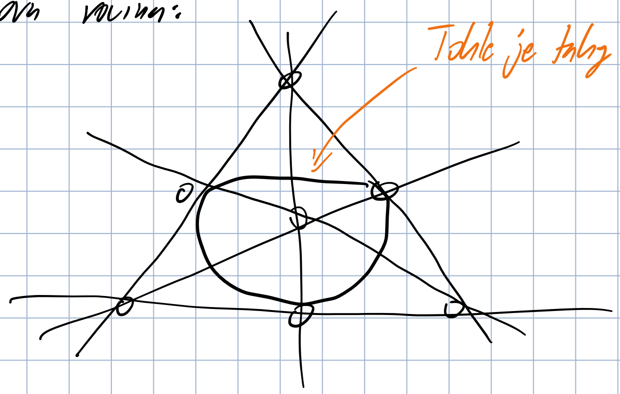
Konečné projektivní roviny:

množina bodů → $(X, \mathcal{P})$ ← množina přímek 2^X

Df: Konečnou množinu X, systém podmnožin $\mathcal{P}$ množiny X nazveme ~projektivní rovinou~ $(X, \mathcal{P})$ pokud platí:

1) „každé dva body určují právě jednu přímku": $\forall x \neq y \in X : \exists! P \in \mathcal{P} : x, y \in P$
2) „každé dvě přímky se protínají právě v jednom bodě": $\forall Q \neq P \in \mathcal{P} : |P \cap Q| = 1$, nebo $\exists! x \in X : x \in P \cap Q$
3) „Existence 4 bodů v obecné poloze": $\exists \bar{c} \subseteq X : \forall p \in \mathcal{P} : |\bar{c} \cap p| \leq 2$, $|\bar{c}| = 4$

Fanova rovina:



Pro $(x, y \in X,\ x \neq y : \ \overline{xy} :=$ přímka určená body $x\,y)$

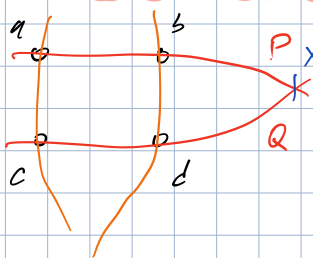
Věta: V každé projektivní rovině obsahuje každá přímka stejný počet bodů.

Dk: Nechť $P, Q \in \mathcal{P}$ (tedy jsou dvě přímky). Ukážeme, že $\exists x \in X$ (bod), ležící mimo P, Q.

Podle 3. axiomu $\exists C = \{a, b, c, d\}$ t.ž. $\forall p \in P : |p \cap c| \leq 2$

1) Pokud $c \notin P \cup Q$, tak hotovo → tudíž ten bod, co neleží na přímkách, je x.

2) BÚNO $a, b \in P$, $c, d \in Q$.



Podle axiomu 2 určíme $\overline{ac}$ a $\overline{bd}$. Ty se někde musí protnout, tudíž vytvoří bod x.

→ Pak $x \notin P$.

Pokud $x \in P$: $x \in P \cap \overline{ac} = \{a\}$ ⟹ $x = a$. Pak ale $\overline{bd} = \{b, d, \underline{x}\} = \{b, d, a\}$ $\boxed{\lightning}$

2b) Analogicky pro Q.

→ každá přímka ale může protínat pouze dva body!

Tedy $\exists x \notin P$ ani Q.

Vezmeme $x \notin P \cup Q$. Potom: $|P| \le |Q|$:

– stačí ukázat, že φ je prosté zobrazení.

Nechť $P = \{y_1, \dots, y_n\}$

a $z_i = \varphi(y_i)$

Sporem: $\exists z_i = z_j$ pro $i \neq j$

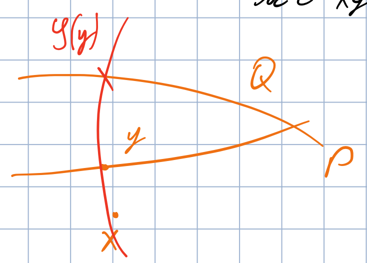
potom $\overline{xy_i}$ a $\overline{xy_j}$ obsahují $x \notin Q$

a $z_i = z_j \in Q$. $\Rightarrow$ ↯ s axiomem 2.

Analogicky $|P| \ge |Q|$.

Potom $|P| = |Q|$.

Nechť: $\varphi: P \to Q$, $y \in P$, $\varphi(y) =$ bod $\in \overline{xy} \cap Q$



Podle axiomu 2 je φ skutečně zobrazení.

$\Leftrightarrow$ Jelikož každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě.

Df: Řád UPR = počet bodů na přímce -1

Tvrzení: $\forall$ UPR řádu m splňuje:

1) $\forall x \in X$: bodem x prochází $m+1$ přímek
2) $|X| = m^2 + m + 1$
3 $|P| = m^2 + m + 1$

Dk:

1) Mějme $x \in X$. Ukážeme, že $\exists p \in P: x \notin p$. (přímka)

$c = \{a, b, c, d\}$

Podle axiomu 3 $\exists c \subseteq X: \forall Q \in P: |c \cap Q| \le 2$

Bůno $x \notin \{a, b, c\}$. Pak ale $\overline{ab}$ nebo $\overline{ac}$ neobsahuje x.

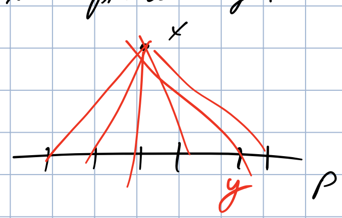
$\Leftarrow$ jinak by $|\overline{ab} \cap \overline{ac}| > 1$ ↯

Tudíž existuje přímka, která neobsahuje x. Pak x je v alespoň $m+1$ přímkách.

Pro $\forall y \in P$ je x v přímce $\overline{xy}$.

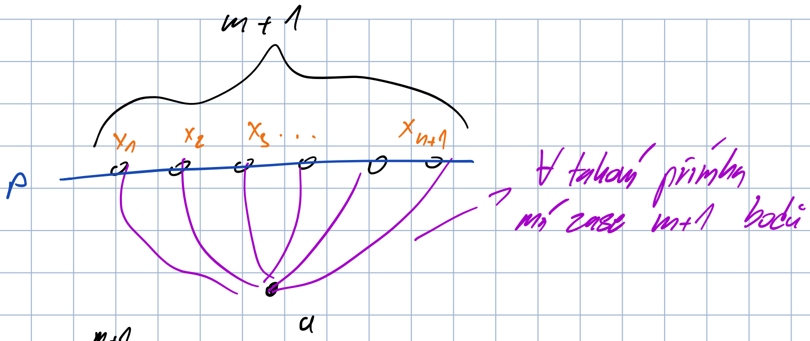
x je v nejvíce $n+1$ přímkách.

– $\forall p \in P$, $p \ni x$ podle axiomu 2 protíná p v y.



2) Uvažme $a \in X$ and $p \in P$: $a \notin p$.

a) Ukážeme $|X| \ge m^2+m+1$



Podle axiomu 2 => přímky $\overline{ax_i}$

sdílejí pouze a. => $|X| \ge 1 + \sum_{i=1}^{m+1}\left(|\overline{ax_i}|-1\right) = 1+(m+1)m = m^2+m+1$

-> tohle je ten vybraný bod a.

b) Ukážeme $|X| \le m^2+m+1$

∀ bod $x \in X \setminus \{a\}$ leží na nějaké přímce $\overline{ax}$ protínající p v nějakém bodě x_i. Podle A1 pak $\overline{ax} = \overline{ax_i}$

3) Plyne z 2) a duality.

Př: Udělejte „Dobble" s 3 obrázky na právě 3 kartách.

Dobble je UPR řádu 7!

Kdyby šlo o 7 obrázků, museli vyrazit Fanovu rovinu.

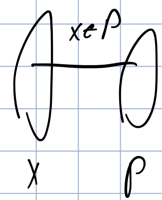
-> Každý obrázek je jeden bod.

Každá karta je jedna přímka (jsou na ní tři obrázky)

Množ. systém (X,P) Df: Duálním množinovým systémem k (X,P) je mn. systém

$$\left(P, \{\{S \in P : S \ni x\} : x \in X\}\right)$$

Df: Incidenční graf pro (X,P) je $(X \cup P, E)$:



kde $E = \{\{x,P\} : x \in P\}$

Tvrzení: Duálem UPR řádu m je UPR řádu m.

Dk: Stačí ověřit axiomy.

a) A1: Chceme: $\forall P,Q \in \mathcal{P}\ \exists! \underbrace{\{S \in \mathcal{P} : x \in S\}}_{L_x} : P,Q \in L_x$

$\forall P,Q \in \mathcal{P}\ \exists! x \in X : x \in P \cap Q$. -> což je axiom 2.

b) A2: $\forall \underbrace{\{S \in \mathcal{P} : x \in S\}}_{L_x}, \underbrace{\{S \in \mathcal{P} : y \in S\}}_{L_y}\ \exists! P \in \mathcal{P} : P \in L_x \cap L_y \Leftrightarrow$

tedy $\{x,y\} \in P$ -> což je axiom 1.

c) A3: Chceme 4 body v duálu v obecné poloze

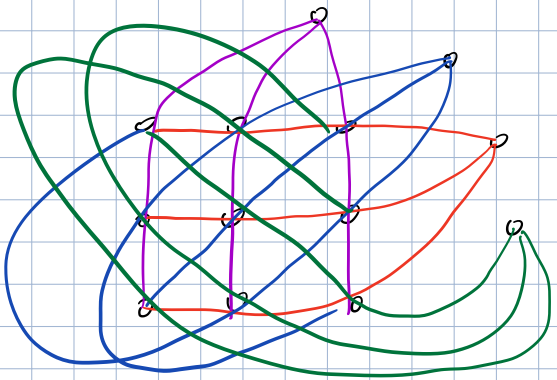
A3 => $\exists C \subseteq X$, $C = \{a,b,c,d\}$, $\forall P \in \mathcal{P} : |P \cap C| \le 2$.

$C' = \{\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{ad}\}$ je v obecné poloze v duálu, -> protože ∀ trojice z C' má dvě které sdílí bod, který není ve třetí z nich.

Zachování řádu plyne z tvrzení, že každým bodem prochází n+1 přímek.

UPR řádu 3:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓	?



Domněnka: UPR řádu n existuje <=> jakmile n je mocninou prvočísla.