Věta: Existuje-li algebraické těleso s n prvky, pak existuje konečná projektivní rovina řádu n.

Dk: $\mathbb{K} :=$ těleso s n prvky, $\mathbb{K}^3 \to$ množina všech trojic prvků z tělesa.

Nyní zavedeme ekvivalenci $\sim$, kde $(x,y,z) \sim (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, kde $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Body $=$ třídy ekvivalence $\sim$ na $\mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, velikost třídy ekvivalence $\Leftrightarrow$ počet nenulových prvků třídy ekv.

$$- |X| = \frac{n^3-1}{n-1} = n^2+n+1$$

Přímky $= \forall (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ definujeme přímku $P_{a,b,c} = \{ [(x,y,z)]_\sim : ax+by+cz = 0 \}$

$\forall (a,b,c) \sim (a',b',c') : P_{a,b,c} = P_{a',b',c'}$ — jelikož $\alpha \cdot (\ldots + \ldots + \ldots) = 0 \;\; \forall \alpha \to = 0$

$- |P| = n^2+n+1$ $\to$ protože ekvivalentní body mi dávají stejné přímky. Tudíž je to omezení.

$- (X,P)$ je KPR? (musíme ověřit (A1), (A2), (A3))

(A1) Mějme $(x,y,z) \not\sim (x',y',z') \in X$. Položme $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$, máme rank $= 2$ z LNZ. — jádro určuje řešení přímky protože $ax+by+cz=0$

$\Rightarrow \dim(\ker(A)) = 1 \xrightarrow{\#\text{ sloupců} - \text{rank}(A)} \Rightarrow$ (A1). $\to$ existuje právě jedna přímka, co obsahuje oba body definované maticí.

(A2) Analogicky, jen matici mám $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ s $\dim(\ker(A)) = 1$.

(A3) Stačí zvolit $C = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\}$ $\to$ jsou to třídy ekv.

$\forall$ 3 vektory jsou LNZ. Tzn. že žádnými 3 z nich nemůže procházet přímka.

Latinské čtverce:

Latinský čtverec řádu n je matice $n \times n$, kde na každé pozici jsou prvky $\{1 \ldots n\}$, kde $\forall$ řádku i sloupci je každá hodnota jen jednou.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Df: Ortogonalita dvou čtverců L, L': $\to L \perp L'$

L a L' jsou ortogonální, pokud $\forall \ell, \ell' \in \{1 \ldots n\}$ existují pozice $i,j \in \{1 \ldots n\} : L_{ij} = \ell, \; L'_{ij} = \ell'$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 32 & 13 & 21 \\ 23 & 31 & 12 \end{pmatrix}$$

→ Každý uspořádaný pár se někde musí objevit.

Pozorování: Pro l.č. L, L' řádu n: $L \perp L'$: $\forall l, l' \in \{1..n\}\ \exists!\ i,j \in \{1..n\}$ $L_{i,j} = l,\ L'_{i,j} = l'$

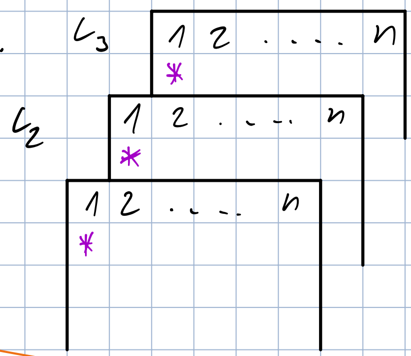
– mám jen n^2 možností a n^2 pozic. Tedy každé jen jednou.

Pozorování: Pokud si zpermutuju prvky $\{1..n\}$ a přepíšu je v l.č., tak stále zůstane latinský čtverec.

Důsledek: Počet $\underbrace{\text{navzájem ortogonálních latinských čtverců řádu } n}_{NOLČ(n)}$ je vždy nejvýš $n-1$.

Dk: Mějme $NOLČ(n)$ $L_1, \dots, L_m$. Chceme ukázat, že $m \leq n-1$. Podle jsou první řádky tvaru $1, 2, \dots n$.

Uvažme prvky na pozicích $[2,1]$:

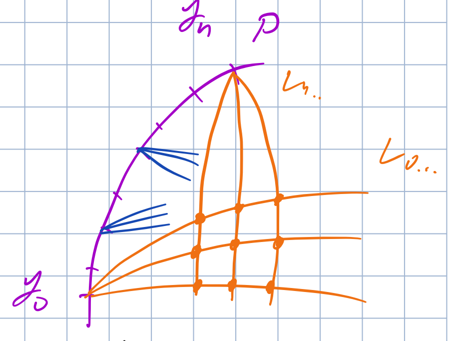


- žádný není 1.
- jsou různé pro různé čtverce

Jsou totiž navzájem ortogonální.

Pak jich může být nejvýš $n-1$.

Věta: $\forall n \geq 2$, $\exists$ KPR řádu $n \iff \exists\ n-1$ $NOLČ(n)$



máme n^2+n+1 bodů.

Dk:

1) $\Rightarrow$ Máme (X,P) řádu n, chceme $NOLČ(n)$ $L_1 \dots L_{n-1}$.

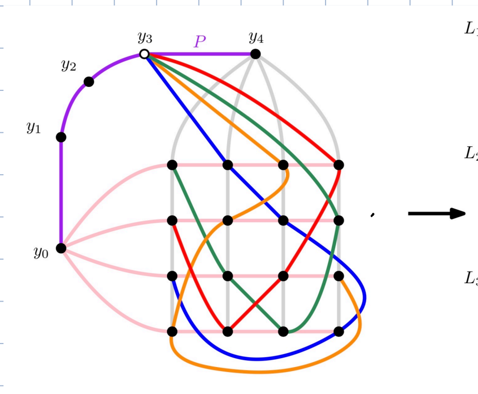
Uvažme $P = \{y_0, \dots y_n\}$

$\forall y_i$ procházejí přímky P_{i1}, P_{in}

Buď $\{x_{ij}\} = P_{0i} \cap P_{nj}$

Pro $k = 1, \dots, n-1$ definujeme L_k:

$$(L_k)_{ij} = l \iff x_{ij} \in P_{kl}$$



L_1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

L_2

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

L_3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

– Mějme $k \in \{1, \dots, n-1\}$, pak $\forall i,j\ \exists \ell : (L_k)_{ij} = \ell$ → mezi každými dvěma body musí vést přímka.

– vyplývá z A1 pro y_k a x_{ij}

– V řádcích nejsou opakování: Sporem! $\exists i, j \neq j'\ \exists \ell : (L_k)_{ij} = \ell = (L_k)_{ij'}$.

– to znamená, že $\{x_{ij}\}, \{x_{ij'}\} \in P_{k\ell}$.

Pak taková přímka $|P_{k\ell} \cap P_{0i}| \geq 2$, což je spor s A2.

– Analogicky pro sloupce.

Pak (L_k) je LČ. Už stačí ukázat jen ortogonalitu.

Uvažme $k \neq k'$, ℓ, ℓ', chceme (i,j): $(L_k)_{ij} = \ell \wedge (L_{k'})_{ij} = \ell'$.

$P_{k\ell}, P_{k'\ell'} \overset{(A2)}{\Longrightarrow} \exists x_{ij} \in P_{k\ell} \cap P_{k'\ell'} \Longrightarrow L_k \perp L_{k'}$ $\boxtimes$

2) $\Leftarrow$

Máme NOLČ(n) $L_1, \dots, L_{n-1}$, chceme KPR (X, P) řádu n.

Zavedeme $X = \{y_0, \dots, y_n\} \cup \{x_{ij} \mid i,j \in \{1, \dots, n\}\}$.

nevlastní → $P = \{y_0, \dots, y_i\}$, $P_{0i} = \{x_{i1}, \dots, x_{in}, y_i\}$, $P_{nj} = \{x_{1j}, \dots, x_{nj}, y_n\}$

vodorovná, svislá

Pro $k = 1, \dots, n-1$, $\ell = 1, \dots, n$, $P_{k\ell} = \{y_k\} \cup \{x_{ij} : (L_k)_{ij} = \ell\}$

šikmá

$\Rightarrow (X, P)$. Stačí ověřit, že je to KPR, tedy A1, A2, A3. → TODO: proč?

A3: Stačí zvolit $C = \{y_0, y_n, x_{11}, x_{22}\}$. Tento příklad obecně platí. $\boxtimes$

A2:

- Nevlastní vs. ostatní: ✓ – všechny ostatní obsahují právě jedno y.
- Vodorovná vs. vodorovná, svislá vs. svislá: ✓ Každé dvě se mi protnou jen v jednom y.
- vodorovná vs. svislá: ✓ $P_{0i} \cap P_{nj} = \{x_{ij}\}$
- vodorovná vs. šikmá: ✓ $P_{0i} \cap P_{k\ell} = |\{x_{ij} \mid (L_k)_{ij} = \ell\}| = 1$ → protože v řádcích se neopakujeme.
- svislá vs. šikmá: ✓ $P_{nj} \cap P_{k\ell} = |\{x_{ij} \mid (L_k)_{ij} = \ell\}| = 1$ → protože ve sloupcích...
- šikmá vs. šikmá: ✓ $P_{k\ell} \cap P_{k'\ell'} = |\{x_{ij} \mid (L_k)_{ij} = \ell \wedge (L_{k'})_{ij} = \ell'\}| = 1$

$\Leftrightarrow$ Protože $L_k \perp L_{k'}$, tedy ortogonalita.

$\boxtimes$

→ počet párů dvojice bodů a přímky je obsahující.

A1:

– Dvěma způsoby spočítáme $z = |\{(\{a,b\},P)\}|$, $a \neq b \in X$, $P \in \mathcal{P}$, $a,b \in P$.

1. způsob $z = \underbrace{(n^2+n+1)}_{\text{počet přímek}}\underbrace{\binom{n+1}{2}}_{\text{počet párů bodů na vybrané přímce.}}$ – P zafixované.

2. způsob $z \le \underbrace{\binom{n^2+n+1}{2}}_{\text{počet párů bodů}}$ – (a,b) zafixované

$z \le$: Podle A2 každým párem z X prochází nejvýš 1 přímka.

$$\underbrace{(n^2+n+1)\cdot\binom{n+1}{2}}_{A} = z \le \underbrace{\binom{n^2+n+1}{2}}_{B} \qquad A = B$$

Každým párem prochází právě jedna přímka. $\Rightarrow$ A1 platí. $\boxed{\times}$