**Df:** Vrcholové pokrytí v $G$ je $C \subseteq V$: $\forall e \in E: e \cap C \neq \emptyset$

**Df:** Párování grafu $G$ je podgraf tvořený disjunktními hranami.

**Věta:** (Kőnigova – Egerváryho)

V bipartitním grafu je velikost max. párování (počet hran párování) = velikosti minimálního vrcholového pokrytí.

**Dk:**

Mějme bipartitní graf, partity $A, B$. Z $G$ vytvoříme síť přidáním zdroje $Z$ a hran $(z,a)\ \forall a \in A$, přidáme stok $S$ a hrany $(b,S)\ \forall b \in B$. Zorientujeme hrany z $A$ do $B$.

Přidáme kapacity: $|A|+|B|$ starým hranám, $1$ novým hranám

Podle věty o tocích: $\exists$ max. tok $f$, $\exists$ min. řez $R$.

Podle věty o celočíselnosti: Tok musí být celočíselný.

V $f$ $\forall e$ teče $0/1$. $\Rightarrow$ do každého vrcholu ze zdroje teče jen $1$.

Řez $R$ používá jen nové hrany

$|f| = |$maximálního párování$|$

**Dk:**

Párování velikosti $k \Rightarrow$ tok velikosti $k$.

Tok $f$ určuje párování velikosti $|f|$.

$|f| = c(R)$

$c(R) = |$min. vrcholového pokrytí$|$

**Dk:**

Vrcholové pokrytí velikosti $l \Rightarrow$ řez velikosti $l$

– stačí vzít incidentní hrany s $C$.

Řez $R$ určuje vrcholové pokrytí velikosti $|R|$

– $R$ používá jen nové hrany

$\boxed{\times}$

→ uspořádaná i-tice. Můžou se tedy prvky opakovat

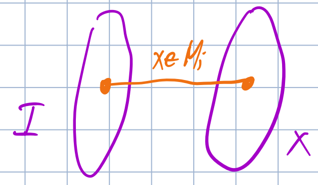
**Df:** $I, X$ konečné množiny, množinový systém $\mathcal{M}$ je $(M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$ pro $\forall i \in I$.

**Df:** (SRR) := systém různých reprezentantů: $f: I \to X$ → nemusí existovat vždy

Hallova věta říká podmínku existence

1) $f$ je prostá
2) $\forall i \in I : f(i) \in M_i$

**Df:** Incidenční graf $G_{\mathcal{M}}$ systému $\mathcal{M}$ je $(I \cup X, E)$, $E = \{\{i,x\}\ i \in I, x \in X, x \in M_i\}$




$\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$, $|\mathcal{M}| = n$

V $\mathcal{M}$ $\exists$ SRR $\Leftrightarrow$ V $G_{\mathcal{M}}$ $\exists$ párování velikosti $|\mathcal{M}|$.

Když hledám $J$ reprezentantů, tak sjednocení musí být alespoň $|J|$. Jinak by se některý prvek opakoval!

**Věta:** (Hallova)

$$\mathcal{M} \text{ má SRR} \Leftrightarrow \underbrace{\forall J \subseteq I : |J| \le \Big|\bigcup_{j \in J} M_j\Big|}_{\text{Hallova podmínka}}$$

→ vyberu si podmnožinu dětí, hraček musí být minimálně tolik, kolik dětí chtějí hraček

**Dk:** $\Rightarrow$

→ množina obrazů musí být podmnožinou sjednocení dílů

SRR $f$, zvolme $J \subseteq I$. $\Big|\bigcup_{j \in J} M_j\Big| \underset{(2)}{\ge} \big|\{f(j) : j \in J\}\big| \underset{(1)}{=} |J|$

1) $f$ je prostá
2) $\forall i \in I : f(i) \in M_i$

Tedy hallova podmínka platí

**Dk:** $\Leftarrow$

Nechť platí hallova podmínka. Vytvoříme síť z $G_{\mathcal{M}}$. Přidáme $z, s$, hrany z/do nich, přidáme jednotkové kapacity pro nové hrany, $|I| + |X|$ pro staré hrany.

Pak existuje max tok $g$ : $|g| = |R|$
existuje min řez $R$.

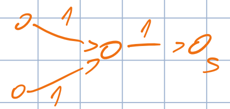
$g$ je celočíselný.
$R$ používá jenom nové hrany
V $g$ je všude 0/1.

$A = \{i : (z,i) \in R\}$ $\quad c(R) = |A| + |B| = |I| - |J| + |B| \overset{*}{\ge} |I| - |J| + \Big|\bigcup_{j \in J} M_j\Big|$

$B = \{x : (x,s) \in R\}$ $\quad R$ je řez $\Rightarrow$ hrany z $J$ vedou do $B$. $\Rightarrow \bigcup_{j \in J} M_j \subseteq B$

$J = I \setminus A$ $\quad * \ge |I|$, protože $|g| = c(R)$. Pak $|g| \ge |I|$.

Dostáváme SRR $f$ předpisem $f(i) = x$, pokud $g(i,x) = 1$

- $f$ je funkce typu $I \to X$, protože $|g| = |I|$
- $f$ je prostá (nemáme  )
- $f(i) \in M_i$ pro $\forall i \in I$, protože máme $G_m$ $\boxed{X}$

**Důsledek:** V $\forall$ bipar. $G = (A \cup B, E)$, kde $E \neq \emptyset$ a $\deg(x) \geq \deg(y)$ $\forall x \in A, \forall y \in B$, $\exists$ párování velikosti $|A|$.

**Dk:**

$G = G_m$. $\quad m = (M_j \subseteq X - B : j \in I = A)$

Stačí ověřit Hallovu podmínku.

Mějme $J \subseteq I$. $\bigcup_{j \in J} M_j$ je množina vrcholů z $B$ s alespoň jedním sousedem z $A$.

$k_1 = \min_{j \in J} \deg(j)$, $k_2 = \max_{x \in \bigcup_{j \in J} M_j} \deg(x)$, $E \neq \emptyset \Rightarrow k_2 \geq 1$,

tedy $k_1 \geq k_2$ $(\deg(a) \geq \deg(b))$.

Definujme $z :=$ # hran mezi $J$ a $\bigcup_{j \in J} M_j$. Pak $k_2 \left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq z \geq k_1 |J|$.

Ale $k_1 \geq k_2$

Pak $|J| \leq \left|\bigcup_{j \in J} M_j\right|$ - vydělení číslem ze vztahu

Tedy Hallova podmínka platí.

Použijeme Hallovu větu

$\exists$ SRR v $m \Leftrightarrow$ párování velikosti

$|I| = |A|$ v $G = G_m$

**Df:** Latinský obdélník typu $k \times n$, kde $k \leq n$, je prostě nedodělaný latinský čtverec

- tedy pravidla jsou furt splněny

**Věta:** $\forall$ latinský obdélník typu $k \times n$ lze doplnit na latinský čtverec typu $n \times n$.

**Dk:**

$O$ = lat. obdélník typu $k \times n$.

Mějme $G = (\underbrace{S}_{\text{sloupce } 1 \dots n} \cup \underbrace{H}_{\text{hodnoty } 1 \dots n}, E)$ bipartitní, kde $\{s_i, j\} \in E \Leftrightarrow j$ není ve sloupci $s_i$

$\forall$ sloupec $S$ v $G$ má stupeň $n-k$

- v $S$ je použito právě $k$ hodnot $\Rightarrow$ není použito $n-k$ hodnot

$\forall$ hodnota $j$ v $G$ má stupeň $n-k$

- celkově zasahuje do $k$ sloupců. (všude může být jen jednou).

Tudíž se neobjevuje v $n-k$ sloupcích. Tedy $\deg = n-k$

Důsledek: $\exists$ párování velikosti $n$. – určuje $(k+1)$. řádek.

$\Rightarrow$ Induktivně takto lze vytvořit postupně $n \times n$.