Df: Hranový řez v G je $F \subseteq E$, t.ž. $G - F = (V, E \setminus F)$ je nesouvislý.

Vrcholový řez v G je $H \subseteq G$, t.ž. $V - H = \left(V \setminus H, E \cap \binom{V \setminus H}{2}\right)$ je nesouvislý

Df. Hranová souvislost $k_e(G)$ grafu G je: $\begin{cases} \min |F|, & F \text{ je hranový řez} \\ 1 & G \cong K_1 \text{ (graf o 1 vrcholu)} \end{cases}$

Vrcholová souvislost $k_v(G)$ grafu G je: $\begin{cases} \min |H|, & H \text{ je vrcholový řez} \\ n-1 & G \text{ úplný} \cong K_n : n \geq 2 \\ 1 & G \cong K_1 \text{ (graf o 1 vrcholu)} \end{cases}$

Df: G je hranově k-souvislý, pokud $k_e(G) \geq k$.

—"— vrcholově —"—, pokud $k_v(G) \geq k$.

Souvislý graf je 1 souvislý

V $\forall G$ $(G \ncong K_1)$ je $k_e(G), k_v(G) \leq \text{Min.deg}(G)$

$$\Rightarrow k_e(G), k_v(G) \leq |V(G)| - 1$$

Lemma: $\forall G, \forall e \in E$: $\quad k_e(G) - 1 \leq k_e(G-e) \leq k_e(G)$

Dk: $k_e(G-e) \leq k_e(G)$

Určíme F = min. hran. řez v G.

$\Rightarrow$ F je hranovým řezem v $G-e$

$$k_e(G-e) \leq |F| = k_e(G)$$

$k_e(G) - 1 \leq k_e(G-e)$

F = min. hran. řez v $G-e$.

$\Rightarrow$ $F \cup \{e\}$ je hranovým řezem v G.

$$k_e(G-e) + 1 = |F| + 1 = |F \cup \{e\}| \geq k_e(G)$$

Lemma: $\forall G = (V, E)\ \forall e \in E$: $\quad k_v(G) - 1 \leq k_v(G-e) \leq k_v(G)$

$\rightarrow$ nechť G není úplný

Dk: $k_v(G-e) \leq k_v(G)$

H = min. vrchol. řez v G. H je vrch. řezem v $G-e$.

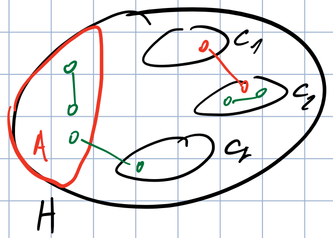
$$k_v(G-e) \leq |H| = k_v(G)$$

$k_v(G)-1 \le k_v(G-e)$

– ukážeme, že $H = G-e$ splňuje: $k_v(G) = k_v(H+e) \le k_v(H)+1$

$H \not\cong K_n \Rightarrow \exists$ min. vrchol. řez A v H.

Nechť $C_1, \dots, C_r$ jsou komponenty v $H-A$. $r \ge 2$.



a) e nespojuje C_i, C_j

– pak A je vrcholovým řezem i v $H+e \to G-e+e = G$

$\Rightarrow \quad k_v(G) \le |A| = k_v(G-e)$

b) e spojuje C_i, C_j, BÚNO: $e = \{x,y\}$, $x \in V(C_1)$, $y \in V(C_2)$, $|V(C_1)| \ge |V(C_2)|$

– pokud $r \ge 3$, pak A je stále řezem

$\Rightarrow k_v(G) \le |A| = k_v(G-e)$

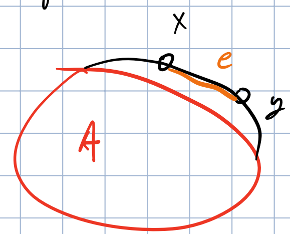
Nechť $r=2$. Nechť $|C_1| \ge 2$. Pak $A \cup \{x\}$ je vrchol. řez.

$\Rightarrow \quad k_v(G-e)+1 = |A|+1 = |A \cup \{x\}| \ge k_v(G)$

Nechť $|C_1| = 1$, tedy i $|C_2| = 1$ pak

→ Tenhle případ už je relativně degenerovaný

protože jde jen o pojmenování



$\boxed{X}$

$k_v(G-e) = |A| = |V(G)|-2 \ge k_v(G)-1$

$\overset{\|}{0} \quad \overset{\|}{0} \quad \overset{\|}{2}-2 \ge 1-1$ ✓

Důsledek: $\forall G: k_v(G) \le k_e(G)$.

Dk: Indukcí: (Podle počtu hran)

$k_e(G) = 0: \Rightarrow G$ je nesouvislý $\Rightarrow k_e(G) = 0 = k_v(G)$

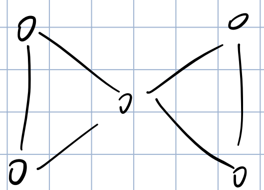
$k_e(G) \ge 1$:

$F :=$ min. hran. řez v G. Nechť $e \in F$.

$k_v(G)-1 \le k_v(G-e) \overset{IP}{\le} k_e(G-e) \overset{e \in F}{=} k_e(G)-1$

$k_v(G) \le k_e(G)$

M



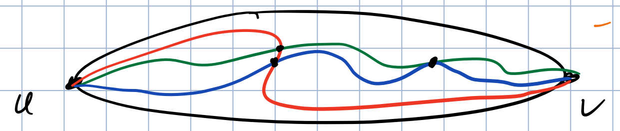
$k_e(M) = 2$

$k_v(M) = 1$

$\boxed{X}$

Věta: Fordem - Fulkersonem

$\forall G=(V,E), \forall t \in \mathbb{N}: k_e(G) \ge t \iff$ Mezi $\forall x \neq y \in V(G)$ $\exists \ge t$ hranově disj. cest.



Dk:

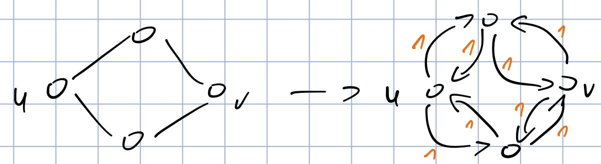
$\Leftarrow$ Chceme $k_e(G) \ge t$. Sporem: Nechť $\exists$ hranový řez F v G, $|F| < t$.

Potom 2 vrcholy v různých komponentách jsou stále spojeny $\ge t - |F| \ge 1$ cestami. ↯

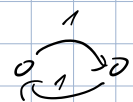
$\Rightarrow$ Chceme najít t disj. cest.

Z G vytvoříme síť. Zdroj bude u, Stok bude v. $\forall e: c(e) = 1$.

$\{x,y\} < \begin{matrix}(x,y)\\(y,x)\end{matrix}$:



Pak $\exists$ tok f: $v(f) = c(R)$, řez R.

Věta o celočíselnosti := na každé hraně teče jen 0 nebo 1. BÚNO. neexistuje 

Buď $F = \{\{x,y\} : (x,y) \vee (y,x) \in R\}$. Protože R je řez, F je hranový řez v G.

$$t \le k_e(G) \le |F| \le c(R) = v(f). \implies v(f) \ge t.$$

Indukcí podle velikosti toku vytvoříme t-disjunktních (u,v) cest.

$v(f) = 1$:

V síti existuje cesta, po které teče 1. $\Rightarrow$ Máme 1 (u,v) cestu. ✓

$v(f) > 1$:

Najdeme orientovanou cestu s tokem 1. Vynulují tento tok.

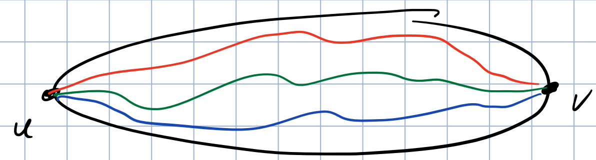
Pak $v(f)$ o 1 menší. $\overset{IP}{\Rightarrow}$ $t-1$ hranově disj. cest v G.

Dohromady t cest v G hranově disjunktních.

Věta: Mengerova věta

$\forall G=(V,E), \forall t \in \mathbb{N}: k_v(G) \ge t \iff$ mezi $\forall x \ne y \in V(G)$ existuje $\ge t$ vrcholově disjunktních cest.

Dk: $\Leftarrow$ Chceme $k_v(G) \ge t$. Sporem:



Nechť $k_v(G) < t$. Potom buď

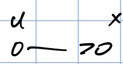
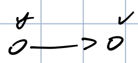
$G \cong K_n$, $n \le t$, potom $\nexists$ t vrch. disj. cest.

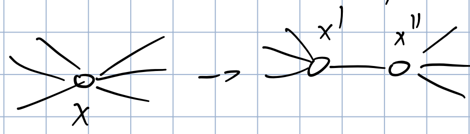
Nebo:

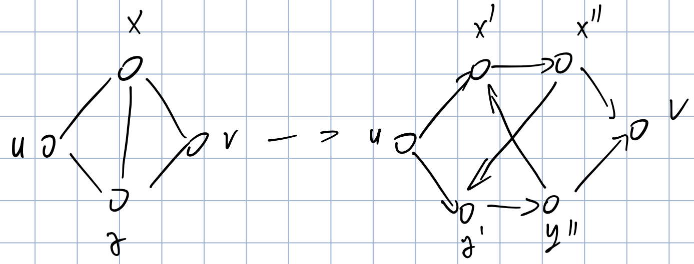
máme vrcholový řez velikosti $\le t-1$. Nestačí na rozpojení t cest. ↯

$\Rightarrow$ Chceme najít t vrch. disj. cest mezi u,v

Vytvoříme síť $(G,u,v,1)$. (Buď $\{u,v\} \notin E$).

$\forall$ hranu $\{x,y\}$, $x,y \ne u,v$ nahradíme , $\{u,x\}$ , $\{y,v\}$ 

každý vrchol $v \in V(G) \ne u,v$, nahradíme 



Pak $\exists$ tok f, $v(f) = c(R)$ řez R.

Pak všude tečou 0/1.

BÚNO: $R \subseteq F$, kde $F \{(x',x''), x \in V(G) \setminus \{u,v\}\}$

! Nezdvojují vrcholy/hrany incidentní se zdrojem/stokem

– tedy $\forall e \in R$ nahradit hranou z F.

Uvažme $A = \{x \in V(G) : (x',x'') \in R\}$, protože R je řez, tak A je vrcholovým řezem.

$$t \le k_v(G) \le |A| = c(R) = v(f) \Rightarrow v(f) \ge t$$

Tím pádem dostáváme t hranově disj. (u,v).

Vytvoříme t vrcholově disj. (u,v) cest nahrazením cesty $(u,x',x'',\dots y',y'',v)$ za $(u,x,\dots y,v)$.

– cesty jsou určitě vrcholově disjunktní.

Zbývá ošetřit $\{u,v\} \in E$.

Postupujeme stejně na $G - \{u,v\}$ $\quad k_v(G-e) \ge k_v(G) - 1 \ge t-1$.

$\Rightarrow$ $t-1$ vrcholově disj. cest mezi u,v v $G - \{u,v\}$ (t-tá cesta bude (u,v)) $\boxtimes$