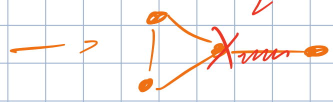
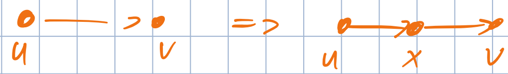
Df: Most je hranový řez velikosti 1.

Df: Artikulace je vrcholový řez velikosti 1: ⟶



toto je artikulace

Df: Mějme $G=(V,E)$, $e \in E$: $G \div e :=$ graf vzniklý z G operací podrozdělení hrany e



Lemma: $\forall G=(V,E)$, $\forall e \in E$: (*)

G je vrcholově 2-souvislý $\iff$ $G \div e$ je vrcholově 2-souvislý

Dk:

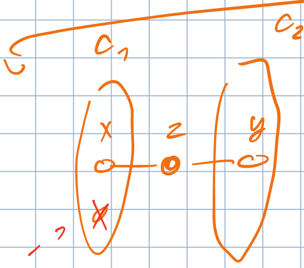
$\Leftarrow$ Plyne z: $\forall v \in V$:

$G - v$ je souvislý $\iff$ $(G \div e) - v$ je souvislý

- pokud jsem vrcholem zrušil cestu, tak je jedno, jestli to bylo podrozdělený.

$\Rightarrow$ Stačí ověřit: Pokud je nový vrchol artikulací, pak i G má artikulaci.

G má alespoň 3 vrcholy (z 2-souvislosti). Je-li nový vrchol z artikulací, pak i jeden jeho soused je artikulací.



Někde musí být ještě jeden vrchol

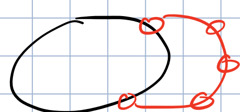
Kdybych toto odebral, taky rozbiju souvislost.

Věta: Ušatý lemma:

G je vrcholově 2-souvislý $\iff$ z K_3 jde vyrobit operacemi: přidávání a podrozdělování hrany.

Alternativní:

G je vrcholově 2-souvislý $\iff$ z cyklu jde vyrobit lepením uší.



Dk:

$\Leftarrow$: Snadné: K_3 je vrcholově 2-souv.

- přidáním hran neporuším 2-souvislost
- podrozdělení hran neporuší souvislost podle lemma (*)

$\Rightarrow$: Chci G dostat lepením uší.

Induktivně:

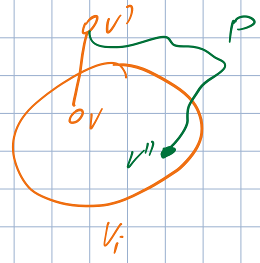
- $G_0 :=$ cyklus v G (musí existovat, jinak není 2-souvislý)
- Mějme $G_0, G_1, \dots G_i$, kde $G_{j+1} = (V_{j+1}, E_{j+1})$, kde $G_{j+1} = G_j + P_j$ ucho → ještě není vyrobený; alespoň si líne už nějakého vrcholu

Pokud $G_i = G$, hotovo. Nechť $G_i \neq G$. Pak $\exists e \in E \setminus E_i$, tž $e \cap V_i \neq \emptyset$

- 2 případy:

Pokud $e \subseteq V_i$, tak e přidáme jako ucho. ✓

Jinak $e = \{v, v'\}$, kde $v \in V_i$, $v' \in V \setminus V_i$



- díky vrcholové 2-souvislosti nemůže být $G - v$ artikulace, tudíž $\exists$ cesta (v', V). Pak jsem ale dostal ucho! ✓
  (vrchol, množina)

$\boxed{X}$

Počítání 2 způsoby:

- chceme x
- spočítáme z 2 způsoby
  - napřímo
  - pomocí x

Otázka:

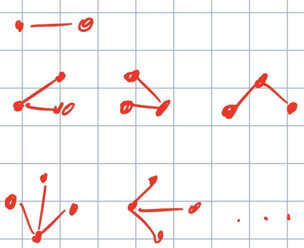
? Kolik je stromů na n-vrcholech ?

Alt. ? Čemu se rovná $\mathcal{K}(n) :=$ počet koster úplného grafu na n-vrcholech ?

$\mathcal{K}(2) = 1$

$\mathcal{K}(3) = 3$

$\mathcal{K}(4) = 16$



Věta: Cayleyho vzorec:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \mathcal{K}(n) = n^{n-2}$$

Důkaz

2 způsoby spočítáme # posloupností := postup výroby kořenových stromů := $(T, R, Č)$

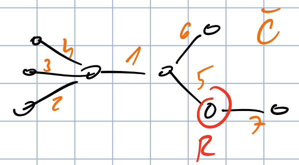
strom na n vrcholech, kořen, bijekce $E \to \{1 \dots n-1\}$

1. způsob:

- vybereme T $\to$ $\mathcal{K}(n)$ způsoby
- vybereme R $\to$ n způsoby
- očíslovat hrany $\to$ $(n-1)!$ způsobů

$$z = \mathcal{K}(n) \cdot n \cdot (n-1)!$$

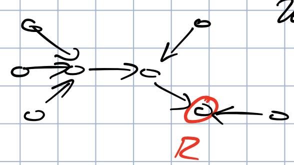
Např.:



- odpovídá to výrobě zakořeněného stromu

Kořenový strom odpovídá orientaci stromu, kde z právě 1 vrcholu nevede šipka.

Př.:



Zorientuju: pak z kořene nevede šipka.

2. způsob:

z = # způsobů jak přidávat šipky tak, abychom dostali takovou orientaci.

Invarianty přidání šipek:
1) Nesmíme vytvořit neorientovaný cyklus
2) $\forall C \subseteq V$ komponenta vede alespoň 1 šipka z $\forall$ vrcholu, až na jeden.

$\Rightarrow \forall C \subseteq V$ komponenta má svůj kořen

$\Rightarrow$ V $\forall$ kroku šipka spojuje 2 komponenty.

$\Rightarrow$ šipku vedeme do libovolného vrcholu z kořene jiné komponenty.

1-šipka: $n\cdot(n-1)$ způsoby

n volných — zbylé komponenty / vrcholy

Nechť jsme položili $k \in \mathbb{N}_0$ šipek, pokládáme $k+1$ šipku.

Tu lze položit $n\cdot(n-k-1)$ způsoby.

kam — odkud

(Mám $n-k$ komponent)

(-1, protože jednu komponentu jsem už vybral)

$$\Rightarrow \quad z = \prod_{k=0}^{n-2} n\cdot(n-k-1)$$

$\longrightarrow n\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n-2)\cdot n\cdot(n-3)\dots$

Pak dohromady:

$$X(n)\cdot n\cdot\cancel{(n-1)!} = z = \cancel{(n-1)!}\cdot n^{n-1}$$

$$X(n) = \frac{1}{n}\cdot n^{n-1} = n^{n-2}$$

$\boxed{\times}$

$X(G) = \#$ koster v G

Věta: $\forall n \geq 2: X(K_n - e) = (n-2)\cdot n^{n-3}$

Df: $\forall G=(V,E), \forall e\in E: X_e(G) = \#$ koster v G obsahujících e.

$$X(G) = X(G-e) + X_e(G) \quad (*)$$

Spočítáme 2 způsoby $X_e(K_n)$:

$$z = |\{(T,e) : T \text{ je kostra } K_n,\ e\in E(T)\}|$$

→ počet incidencí

→ jednou budu fixovat kostru, podruhé hranu

1. způsob:

- Vyberu kostru T: n^{n-2} způsoby (Cayleyho věta)
- pro dané T máme $n-1$ párů.

$$z = (n-1)\cdot n^{n-2}$$

2. způsob:

- Vybereme e $\binom{n}{2}$ způsoby
- pro dané e máme $X_e(K_n)$ párů

$$z = \binom{n}{2}\cdot X_e(K_n)$$

Tedy:

$$(n-1)\cdot n^{n-2} = \binom{n}{2}\cdot X_e(K_n)$$

$$X_e(K_n) = \frac{(n-1)\cdot n^{n-2}}{\binom{n}{2}} = 2n^{n-3}$$

Podle (*): $X(n) = n^{n-2} = X(K_n - e) + 2n^{n-3}$

$$X(K_n - e) = n^{n-2} - 2n^{n-3} = (n-2)\cdot n^{n-3}$$

$n\cdot n^{n-3} - 2\cdot n^{n-3}$

$n^{n-3}\cdot(n-2)$

- $\kappa(G)$ lze spočítat pomocí determinantu: Pomocí Laplaciánu $L(G) = \left(L(G)\right)_{i,j=1}^{n}$,

kde $L(G)_{ij} = \begin{cases} \deg_G(i) & i=j \\ -1 & \{i,j\} \in E \\ 0 & \{i,j\} \notin E \end{cases}$

Věta: Kirchhoffova věta

$$\forall G: \kappa(G) = \det\left(L(G)_{1,1}\right)$$

bez prvního řádku a sloupce

Kostry úplných grafů — Cayleyho vzorec

Věta: Úplný graf K_n má n^{n-2} koster.

Důkaz:

$$\kappa(K_n) = \det(\boldsymbol{L}_{K_n}^{1,1}) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -n & n & 0 & \dots & 0 \\ -n & 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$