

Množiny uspořádání:

Implikace:

Necht' $M \subseteq \mathbb{R}$:

1) $\forall x \in M \exists y \in \mathbb{R} : y > x \wedge y \in M$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y > x \wedge y \in M$

3) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{R} : y \geq x \wedge y \in M$

4) $\mathbb{N} \subseteq M$

2) $\sim$ 3)

1) $\Rightarrow$ 2) X protipříklad: (0,1)

1) $\Rightarrow$ 3) X —||—

1) $\Rightarrow$ 4) X —||—

2) $\Rightarrow$ 1) ✓ nemá platit pro podmnožinu

2) $\Rightarrow$ 3) ✓ $>$ je více restriktivní než $\geq$

2) $\Rightarrow$ 4) X

3) $\Rightarrow$ 1) ✓

3) $\Rightarrow$ 2) ✓

3) $\Rightarrow$ 4) X

4) $\Rightarrow$ všechno

pakud je M skon. množina, tak platí ostatní body

Nalezněte supremum a infimum následujících podmnožin reálných čísel

(a rozhodněte, zdali jde o maximum / minimum)

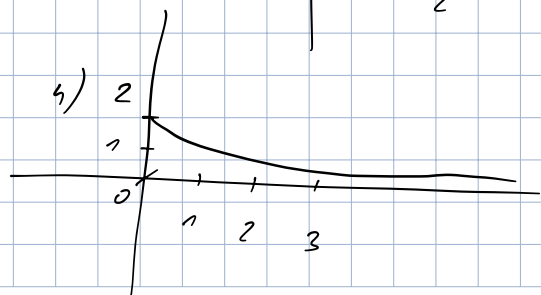
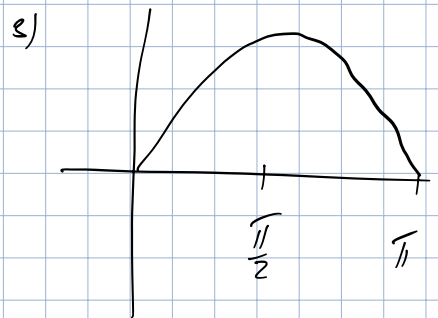
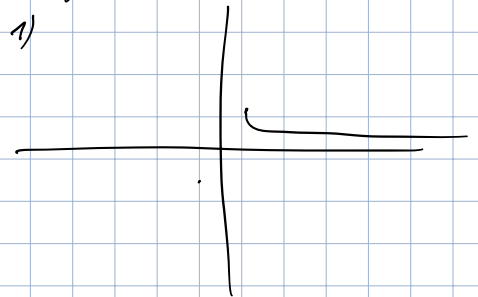
1) $\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ $\max = 1$, $\inf = 0$

2) $\{ q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 3 \}$ $\sup = \sqrt{3}$ $\inf = -\sqrt{3}$

3) $\{ \sin x \mid x \in (0, \pi) \}$ $\max = 1$ $\inf = 0$

4) $\{ 2^{-n} + 3^{-n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ $\max = \frac{5}{6}$, $\inf = 0$

$$2^{-n} + 3^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$



Poslednosti:

Implikace:

Mějme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pro $a \in \mathbb{R}$

1) (a_n) omezená

2) (a_n) konvergentní

3) $\exists$ vybraná podposloupnost, která je konvergentní

4) $\exists$ vybraná podposloupnost, která je omezená

1) $\Rightarrow$ 2) X

1) $\Rightarrow$ 3) $\checkmark$ Bolzano-Weierstrass

1) $\Rightarrow$ 4) $\checkmark$

2) $\Rightarrow$ 1) $\checkmark$

2) $\Rightarrow$ 3) $\checkmark$

2) $\Rightarrow$ 4) $\checkmark$

3) $\Rightarrow$ 1) X Podposloupnost může

3) $\Rightarrow$ 2) X být stejná z více

Nalezněte lim posl:

3) $\Leftrightarrow$ 4)

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2 - 2n} \right) \cdot \left(5 - \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(20 + \frac{5}{n} + \frac{10}{n^2 - 2n} - \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3 - 2n^2} \right) \stackrel{AL}{=} \\ 20 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 20$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1} \cdot \frac{\sqrt{n+5} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n-1}} = \frac{n+5 - n-1}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n-1}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n-1}} = 0$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n^2 = 0$$

Omezená posloupnost $\cdot \frac{1}{n}$ bude stále 0 $\checkmark \infty$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n + 10^n}{-2^{n+1} + 5^{n+1} + 10^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n \cdot \left(\left(\frac{3}{10} \right)^n + \left(\frac{5}{10} \right)^n + 1 \right)}{10^{n+1} \cdot \left(\left(-\frac{2}{10} \right)^{n+1} + \left(\frac{5}{10} \right)^{n+1} + 1 \right)} \stackrel{AL}{=} \frac{1}{10} \cdot \frac{(0+0+1)}{(-0+0+1)} = \frac{1}{10}$$

Limita, spojitost a derivace funkce:

Implikace:

Mějme $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) f spojitá v 1
- 2) $\exists$ vlastní $f'(1)$
- 3) $\exists$ vlastní jednostranné derivace $f'_+(1)$ a $f'_-(1)$
- 4) f je omezená v nějakém otevřeném intervalu obsahujícím 1.

1) $\Rightarrow$ 2) ☒	2) $\Rightarrow$ 1) ☒	3) $\Rightarrow$ 1) ☒	4) $\Rightarrow$ 1) ☒
1) $\Rightarrow$ 3) ☒	2) $\Rightarrow$ 3) ☒	3) $\Rightarrow$ 2) ☒	4) $\Rightarrow$ 2) ☒
1) $\Rightarrow$ 4) ☒	2) $\Rightarrow$ 4) ☒	3) $\Rightarrow$ 4) ☒	4) $\Rightarrow$ 3) ☒

2 $\Rightarrow$ spojitost $\Rightarrow$ pak v nějakém okolí leží $f(x)$ v druhém pruhu.

Nb a v tom pruhu je omezená.

Spočítejte limity:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2x - 3)'}{(x^2 - 1)'} = \frac{2x + 2}{2x} = \underline{\underline{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \end{array} \right\} \text{lim neexistuje}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+2^x)}{x} = \frac{\log(1) \cdot \log(2^x)}{x} = \frac{\log(1) \cdot \log(2) \cdot x}{x} = \overset{0}{\log(1) \cdot \log(2)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{120x^5} \dots \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} \dots = 0$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$