Df: Jednorozměrný Riemannovský integrál:

Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je omezená. $D=\{a_0,a_1,\dots,a_k\}$ je dělení $[a,b]$, pokud $a=a_0<a_1\dots<a_k=b$.

Označme:

$$s(D,f)=\sum_{i=1}^{k}|a_i-a_{i-1}|\cdot\inf_{[a_{i-1},a_i]} f \quad \dots \text{ dolní součet}$$

$$S(D,f)=\sum_{i=1}^{k}|a_i-a_{i-1}|\cdot\sup_{[a_{i-1},a_i]} f \quad \dots \text{ horní součet}$$

$$\underline{\int_a^b} f=\sup\{s(D,f):D \text{ dělení } [a,b]\}$$

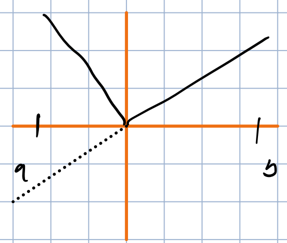
$$\overline{\int_a^b} f=\inf\{S(D,f):D \text{ dělení } [a,b]\}$$

Řekneme, že f má na $[a,b]$ R. integrál (píšeme $f\in R([a,b])$), pokud $\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f$, pak $\int_a^b f:=\underline{\int_a^b} f$

Základní vlastnosti:

- Nechť $f,g\in R([a,b]) \Rightarrow f+g,\ f\cdot g\in R([a,b])$, a pokud $f\le g$, tak $\int_a^b f\le\int_a^b g$
- $f,g\in R([a,b])$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, pak $\int_a^b \alpha f+\beta\cdot g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$
- $c\in[a,b]$, pak $f\in R([a,b]) \Leftrightarrow f\in R([a,c])\cup R([c,b])$

  a $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_a^b f$
- $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b |f|$ $\dots$



Rozhodněte:

$f,g \in R([a,b])$, $f<g$ (tj. $f \le g$ a $\exists x \in [a,b]: f(x) < g(x)$)

$\Rightarrow \int_a^b f < \int_a^b g$.

Neplatí: $f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \in (0,1] \end{cases}$

pak $f>0$, ale $\int_0^1 f = \int_0^1 0 = 0$

Dolní $\underline{\int_0^1} f = 0$

Žádný z obdélníků nemůže být vyšší než 0, protože by nebyl pod bodem 1 $x=0$.

Platí, pokud f,g spojité?

Platí:

Jelikož jsou spojité a různé,

tak budou různé i na nějakém okolí,

tudíž to už se projeví do integrálu.

Lze přeformulovat:

Je-li $f \in R([a,b])$, $f \ge 0$ a $\exists x \in [a,b]: f(x) > 0 \overset{?}{\Rightarrow} \int_a^b f > 0$

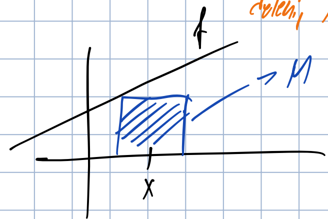
$\left(f<g \iff g-f>0,\ \int f < \int g \iff \int g - \int f > 0 \iff \int g-f > 0 \right)$

$\overline{\int_0^1} f = 0$

Shora všude budou obdélníky nulové a pak pod $x=0$ bude jeden obdélník nad bodem $[0,1]$. Postupně dle bude zjemňovat to dělení, takže inf součtu bude blížit nule.

$f(x) > 0$, f spojitá $\Rightarrow \exists \delta > 0$, t.ž. $\forall y \in (x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]$:

$f(y) > \frac{f(x)}{2} \Rightarrow \int_a^b f \ge \underline{\int_a^b} f \ge$ plocha $M > 0$



Příklad:

Rozhodněte, jaké platí inkluze mezi množinami ($a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$):

$M_1 = R([a,b])$

$M_2 = C([a,b]) = \{f:[a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ spoj. na } [a,b]\}$

$M_3 = \{f:[a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ omezená}\}$

$M_2 \subseteq M_1$ ✓ → každá spojitá je integrovatelná

$M_3 \not\subseteq M_2$ — Opět funkce z příkladu

Riemannův integrál vyžaduje omezené fce → $M_1 \subseteq M_3$

$M_3 \not\subseteq M_1$ → $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

→ $\overline{\int_0^1} f = 1$

$\underline{\int_0^1} f = 0$

- v libovolném dělení vždy existuje iracionální číslo. Tudíž ty obdélníky musí být vždy u 1. zatímco u dolního půjdou vždy dolu.

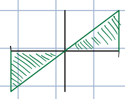
$M_2 \not\supseteq M_1$ → můžu integrovat i nespojité funkce

$M_2 \subseteq M_3$ → spojitá funkce je omezená, protože $[a,b]$ uzavřený, tedy kompaktní, tudíž tam je f spojitá.

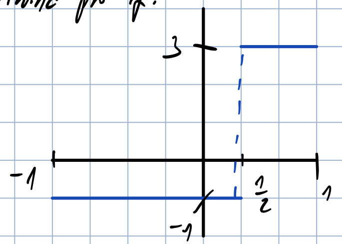
Příklad:

Nalezněte $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, že $\int_{-1}^{1} f = 0$, ale $\int_{-1}^{1} f^3 \neq 0$.

Fakt: Pro lichou funkci f: $\forall a \geq 0$ $\int_{-a}^{a} f = 0$



Například pro f:



- jakmile to umocním na 3, tak dole 1 zůstane, nahoře mi to ale uletí.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$, nalezněte $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, že $\underline{\int_0^1} f = \alpha$, $\overline{\int_0^1} f = \beta$

? ?

Vícerozměrný integrál:

- místo 2D dělení budeme dělit na vícerozměrné cihličky.

$f: M \to \mathbb{R}$ omezená. Najdi cihlu C (tj. součin intervalů) tak, aby $M \subset C$.

Definujme $\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{na } M \\ 0 & \text{na } C \setminus M \end{cases}$. Pak $\int_M f = \int_C \tilde{f}$

→ protože v těch ostatních bodech je $f = 0$, tudíž integrál neovlivní.

Věta: Fubiniova (pro $n=2$) $f: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$, pak

$$\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \right) dy$$

, pokud všechny uvažované intervaly existují.

Příklad

$\int_M \sin(x+2y)\,dx\,dy$, kde $M = \overbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}^{x} \times \overbrace{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]}^{y}$

Použijeme Fubiniovu větu:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+2y)\,dy \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} \cdot \cos(x+2y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+\pi) - \cos(x)\,dx =$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -2 \cdot \cos x\,dx = \left[\sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = \underline{\underline{2}}$$

$\int_M xyz^2$, $M=[0,2]\times[0,2]\times[-1,1]$ funkce je spojitá ✓

mohu vytknout, jelikož jde o konstanty

$$\int_0^2\left(\int_0^2\left(\int_{-1}^1 xyz^2\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^2 x\cdot\left(\int_0^2 y\left(\int_{-1}^1 z^2\,dz\right)dy\right)dx =$$

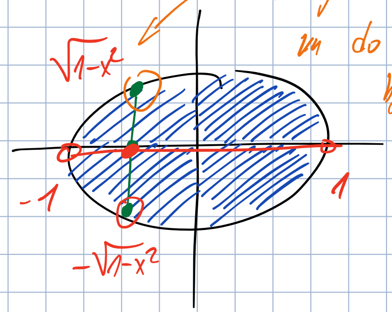
$$\int_0^2 x\left(\int_0^2 y\left[\frac13 z^3\right]_{-1}^1 dy\right)dx = \int_0^2 x\left(\int_0^2 y\cdot\left(\frac13-\left(-\frac13\right)\right)dy\right)dx$$

$$=\frac23\cdot\int_0^2 x\left[\frac12 y^2\right]_0^2 dx = \frac23\int_0^2 x\cdot\left(\frac42-\frac02\right)dx = \frac43\cdot\left[\frac12 x^2\right]_0^2 = \frac83$$

Příklad:

$$\int_M x\cdot(y+1), \text{ kde } M=\{x^2+y^2\le 1\}$$

nemůžu jít i vertikálně -1 do 1, protože bych byl hodnotu mimo hranici.



$$\int_{-1}^1\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\cdot(y+1)\,dy\right)dx =$$

$1=x^2+y^2$

$y^2=1-x^2$

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$

$$=\int_{-1}^1 x\cdot\left[\frac{y^2}{2}+y\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^1 x\left(\left(\cancel{\frac{1-x^2}{2}}+\sqrt{1-x^2}\right)-\left(\cancel{\frac{1-x^2}{2}}-\sqrt{1-x^2}\right)\right)dx =$$

$$=\int_{-1}^1 x\cdot 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

→ je lichá, tedy musí být nula

$\parallel$ 0

$z=1-x^2$

$dz=-2x\,dx$

→ když substituji, musím přepočítat meze

Tedy $\overline{\ \ }=1-1^2=0$

$\underline{\ \ }=1-(-1)^2=0$

$$\int_0^0 -\sqrt{z}\,dz = 0$$