Substituce ve více proměnných:

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\phi: U \to \mathbb{R}^n$ prosté regulární $D \subseteq U$. Jakobián ϕ je

$J(\phi) = \det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right)_{i,j = 1 \dots n}$. Pak pro f spojitou na $\mathbb{R}^n$ platí:

$$\int_{\phi(D)} f = \int_D f(\phi(x)) \cdot J(\phi)(x)\, dx$$

Polární souřadnice:

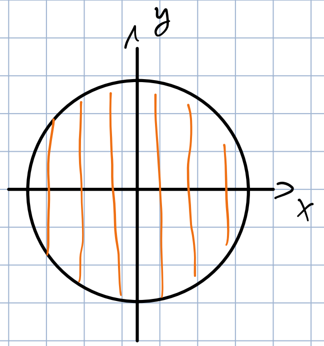
$x = r \cdot \cos \varphi$

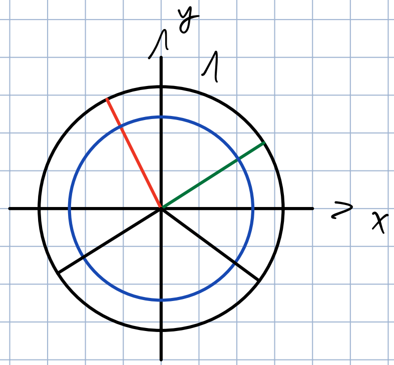
$y = r \cdot \sin \varphi$

$r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$\phi(r, \varphi) = (x, y)$, kde

$$J(\phi)(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cdot \cos^2 \varphi + r \cdot \sin^2 \varphi = r$$





Sférické souřadnice:

$x = r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta$

$y = r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta$

$z = r \cdot \sin \theta$

$r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

θ -> určuje, jak vysoko na zeměkouli jsme

φ -> jak daleko jsme na rovnoběžce

–je to regulární až na body pólů, tam těch řešení je víc.

Zároveň platí: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \theta & -r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta & -r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \\ \sin \varphi \cdot \cos \theta & r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta & -r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cdot \cos \theta \end{vmatrix} =$$

$$= \left(r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos^3 \theta + r^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \theta \right) - \left(r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos \theta - r^2 \cdot \cos^3 \theta \cdot \sin^2 \varphi \right) =$$

$$= r^2 \cdot \cos^3 \theta + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos \theta = \underline{\underline{r^2 \cdot \cos \theta}}$$

Hmotnost tělesa

V těleso, pak hmotnost M je rovna $M=\int \rho(x,y,z)\,dxdydz$ kde $\rho(x,y,z)$ je hustota tělesa v $[x,y,z]$.

– to se používá, pokud mám nehomogenní těleso, které nemá stejnou hustotu v celém tělese. (například hustota hvězdy je dost jiná na středu a okraji)

Př: Spočtěte hmotnost koule, jestliže její hmotnost je rovna druhé mocnině vzdálenosti od středu koule.

Posuňme střed do $[0,0,0]$ s poloměrem R. → to je to zadání hmotnosti

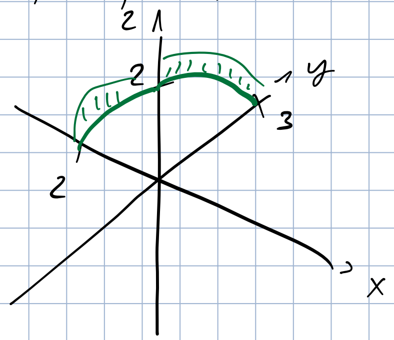
Pak $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\le R^2\}$, $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$$\text{Tedy } M(V)=\int_V \rho=\int_V x^2+y^2+z^2\,dxdydz \overset{\text{sférické s. + Fubini}}{=} \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cdot\underbrace{r^2\cdot\cos\theta}_{\text{Jakobián}}\,d\theta\,d\varphi\,dr$$

$$=\int_0^R r^4\,dr\cdot\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R\cdot 2\pi\cdot\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{R^5}{5}\cdot 2\pi\cdot(1+1)=\underline{\underline{\frac{4\pi R^5}{5}}}$$

Př: $\int_W xy\,dxdydz$, kde $W=\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}\le 1,\ x\le 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}$

v jednom směru to bude šišatá koule



Potřebujeme zobecněné sférické souřadnice:

odmocniny z čísel ve zlomcích z nerovnosti

$$x = 2r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta$$
$$y = 3r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta$$
$$z = 2r\cdot\sin\theta$$

$$0\le r\le 1,\quad \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

Chci zachovat rovnost při $r=1$

$$r=1\ \dots\ \frac{4\cdot\cos^2\varphi\cdot\cos^2\theta}{4}+\frac{9\cdot\sin^2\varphi\cdot\cos^2\theta}{9}+\frac{4\cdot\sin^2\theta}{4}=$$
$$\cos^2\theta\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\sin^2\theta=1$$

– spočítám si jakobián:

$$\begin{vmatrix} 2\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta & -2r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta & -2r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta \\ 3\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta & 3r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta & -3r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ 2\cdot\sin\theta & 0 & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = \dots = 12\cdot r^2\cdot\cos\theta$$

→ je to stejné jako u koule, jen tam je 12.

$$\int_W xy\, dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{2r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta}^{x}\cdot\overbrace{3r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta}^{y}\cdot\overbrace{12r^2\cdot\cos\theta}^{J(\phi)}\, dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= 72\cdot\int_0^1 r^4\,dr\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta = 72\cdot\frac{1}{5}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin 2\varphi}{2}\,d\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot(1-\sin^2\theta)\,d\theta =$$

$z = \sin\theta$
$dz = \cos\theta\, d\theta$

→ musím změnit rozsah podle substituce

$$= \frac{72}{5}\cdot\left[-\frac{\cos 2\varphi}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cdot\int_0^1 1 - z^2\,dz = \frac{72}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_0^1 =$$

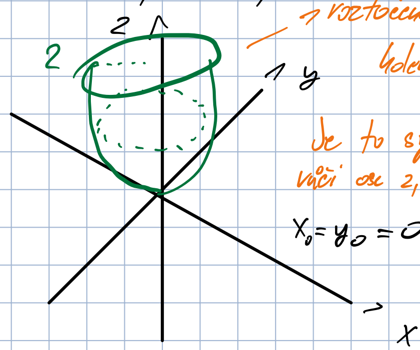
$$= \frac{72}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = -\frac{72}{15} = -\frac{24}{5}$$

Těžiště: Souřadnice těžiště $[x_0, y_0, z_0]$ tělesa V o hmotnosti M a hustotě ρ jsou:

$$x_0 = \frac{1}{M}\cdot\int_V \rho x, \quad y_0 = \frac{1}{M}\cdot\int_V \rho y, \quad z_0 = \frac{1}{M}\cdot\int_V \rho\cdot z$$

Určete těžiště $[x_0, y_0, z_0]$ tělesa V omezeného plochami $z = x^2+y^2$, $z = 2$, je-li hustota $\rho(x,y,z) = k > 0$.

→ rotační paraboloid kolem z.



Je to symetrické vůči ose z, tedy $x_0 = y_0 = 0$. Intuitivně.

1. potřebujeme znát hmotnost

Cylindrické souřadnice:

$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

$z = v$

$0 \le r \le \sqrt{v}$

$0 \le z \le 2$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$\longrightarrow$ $z = x^2 + y^2$, $z = r^2$ na hraně, $v = r^2$

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\cdot\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cdot\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cdot\cos^2\varphi + r\cdot\sin^2\varphi = r$$

$$M = \int_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = k\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{v}} r\,dz\,dv\,d\varphi = k\cdot 2\pi\int_0^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{v}} dv = 2k\pi\cdot\int_0^2 \frac{v}{2}\,dv =$$

$$2k\pi\cdot\left[\frac{v^2}{4}\right]_0^2 = \underline{\underline{2k\pi}}$$

$$z_0 = \frac{1}{2k\pi}\cdot\int_V \rho(x,y,z)\cdot z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2k\pi}\cdot k\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{v}} v\cdot r\,dr\,dv\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\int_0^2 v\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{v}} dv =$$

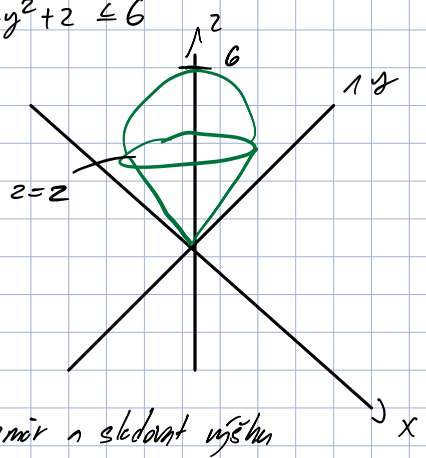
$$= \int_0^2 \frac{v^2}{2}\,dv = \left[\frac{v^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Těžiště je $\left[0, 0, \frac{4}{3}\right]$

i dává smysl, že těžiště v z je nad půlkou, protože ta parabola je menší v dolní půlce..

Př: $\int_W \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, kde $W = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r} \le z \le \underbrace{6 - x^2 - y^2}_{6-r^2}\right\}$

$x^2 + y^2 + z \le 6$



$\sqrt{x^2+y^2} = z$

$z = 6 - x^2 - y^2$

$z = 6 - z^2 \qquad z^2 + z - 6 = 0 \qquad (z+3)\cdot\underline{(z-2)} = 0$

$z = -3$ to nás nezajímá $\qquad z = 2$

$x = r\cdot\cos\varphi \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$

$y = r\cdot\sin\varphi \qquad r \in [0, 2]$ $\longrightarrow$ lepší je fixovat poloměr a skládat výšku

$z = v \qquad v \in [r, 6 - r^2]$

$$\int_W \sqrt{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^{6-r^2} r\cdot r\,dv\,dr\,d\varphi$$