Df: Spočetná množina A: pokud existuje bijekce $f: \mathbb{N} \to A$.

$$y \in \overline{B(x,r)} = \{ z \in X: d(z, B(x,r)) = 0 \} \overset{?}{\Rightarrow} d(x,y) \le r \Rightarrow y \in \bar{B}(x,r)$$

Dk:

$$y \in \bar{B}(x,r) \Rightarrow \inf\{ d(z,y) : z \in B(x,r) \} = 0$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in B(x,r): d(y, x_n) \le \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n, y) < r + \frac{1}{n}.$$

$$\Rightarrow d(x,y) \le r \quad \boxtimes$$

Lepší df: Totálního diferenciálu.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pak $\exists$ total. dif. f v bodě $a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$$\lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i}{\|h\|}}_{= \mu(h)} = 0$$

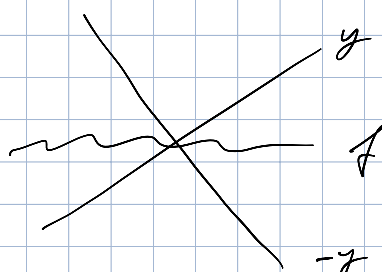
Zatímco původně na přednášce bylo:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \|h\| \cdot \underline{\mu(h)}$$

Tady vyžadujeme spojitou funkci

Př: Naleznete totální dif. všude kde existuje: $\to$ Podle pohledu odhaduji že limita bude existovat

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Jak na to? $\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \le \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right| = |y|$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$ z věty o dvou policajtech

$\Rightarrow$ tedy f je spojitá v 0. $\to$ tudíž f může mít total. dif.

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ platí:

$$f_x(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2x x^2 y}{(x^2+y^2)} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^2 \cdot (x^2+y^2) - 2y(x^2 y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

V bodě $(x,y) = (0,0)$

Pro $x \to$ tedy $y = 0$

$$f_x((0,0)) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0)+(h,0)) - f((0,0))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f((h,0)) - f((0,0))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Pro $y \to$ tedy $x = 0$

$$f_y((0,0)) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,h)) - f((0,0))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{0 + h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Tedy na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ jsou na f_x, f_y spojité, tedy existuje tot. dif. a je rovna

$$D_f((x,y))(h_1,h_2) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \cdot h_1 + \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot h_2$$

V bodě $((0,0))$: Chci zjistit, jestli $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_x((x,y)) = f_x((0,0)) = 0$ a $f_y((x,y)) = f_y((0,0)) = 0$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} =$$ → tedy si myslím, že lim neexistuje

směr $x = y$ ...: $\lim_{x \to 0} \frac{2x^4}{(x^2+x^2)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^4}{4x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$

⇒ Tedy parciální derivace f_x není spojitá v $(0,0)$ protože tahle rovnost neplatí.

Nyní abychom to ověřili, musíme zavolat tu původní definici.

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f((0,0)-(h_1,h_2)) - f((0,0)) - \frac{\partial f}{\partial x}((0,0))\cdot h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}((0,0))\cdot h_2}{\|(h_1,h_2)\|} =$$

Zase mám odhad že neexistuje

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^2\cdot h_2}{h_1^2+h_2^2} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2\cdot h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\to$ vezmu směr $h_1 = h_2$: $\lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^3}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$

$\Rightarrow D_f((0,0))$ neexistuje. $\boxed{\times}$

Řetízkové pravidlo pro derivace více proměnných:

Tohle je polární souřadnice

Př: Spočítej: $\frac{\partial z^*}{\partial y}, \frac{\partial z^*}{\partial r}$, kde $z(x,y) = x^2+y^2$, $x((r,y)) = r\cdot\cos y$, $y((r,y)) = r\cdot\sin y$

$$z^*(r,y) = z(x(r,y), y(r,y)).$$

vektorové násobení

$$\frac{\partial z^*}{\partial y}(r,y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x(r,y),y(r,y)), \frac{\partial z}{\partial y}(x(r,y),y(r,y))\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial y}(r,y)\\ \frac{\partial y}{\partial y}(r,y)\end{pmatrix} =$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}(r,y) = -r\cdot\sin y \qquad \frac{\partial y}{\partial y}(r,y) = r\cdot\cos y$$

$$\to (2x(r,y), 2y(r,y))\cdot\begin{pmatrix}-r\cdot\sin y\\ r\cdot\cos y\end{pmatrix} = (2r\cdot\cos y, 2r\cdot\sin y)\cdot\begin{pmatrix}-r\cdot\sin y\\ r\cdot\cos y\end{pmatrix} =$$

$$= 2r\cdot\cos y\cdot(-r)\cdot\sin y + 2r\cdot\sin y\cdot r\cdot\cos y = 0.$$

Prakticky se parciální derivací $z(x,y)$ koukáme jak se mění ta funkce na obvodu toho kruhu v úhlu y.

Nyní pro $\frac{\partial z^*}{\partial r}$ $\qquad \frac{\partial x}{\partial r}(r,y) = \cos y \quad \frac{\partial y}{\partial r}(r,y) = \sin y$

$$\frac{\partial z^*}{\partial r}(r,y) = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\big(x(r,y),y(r,y)\big), \frac{\partial z}{\partial y}\big(x(r,y),y(r,y)\big)\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,y) \\ \frac{\partial x}{\partial y}(r,y) \end{pmatrix} =$$

$$(2r\cdot\cos y, 2r\sin y) \cdot \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix} = 2r\cos^2 y + 2r\sin^2 y = 2r$$

=> Dívám se, jak se mění funkce při změně r-ka. A jelikož funkce původní x^2+y^2 je symetrická, tak ať se podívám kamkoli, tak ty hodnoty budou stejné.

Kompaktní prostory:

Df: (X,d) je kompaktní, pokud každá $(x_n)_n$ má konvergentní podposl. v X.

Př.: Nechť (X,d) je metrický prostor. $K_1, K_2 \subseteq X$ kompaktní.

Musí být $K_1 \cup K_2$ a $K_1 \cap K_2$ kompaktní?

Důkaz $K_1 \cup K_2$: $(x_n)_n$ posloupnost v $K_1 \cup K_2$.

Pak BÚNO nekonečně mnoho prvků $(x_n)_n$ leží K_1. Označíme $(x_{n_k})_k \subseteq K_1$.

K_1 je kompaktní, tudíž z $(x_{n_k})_k$ lze vybrat konvergentní podposl. $(x_{n_{k_l}})_l$

s limitou $x \in K_1 \subseteq K_1 \cup K_2$. $\boxtimes$

Důkaz $K_1 \cap K_2$: $(x_n)_n$ posl. v $K_1 \cap K_2$. Pak je to posl. $(x_n)_n$ v K_1 i K_2.

Speciálně tedy v K_1. Vyberu tedy podposl. $(x_{n_k})_k \subseteq K_1$, která konverguje k $x \in K_1$

díky kompaktnosti K_1, K_2

A zároveň i $(x_{n_k})_k \subseteq K_2$. => Vyberu podposl. $(x_{n_{k_l}})$ konvergující k $y \in K_2$.

Když vyberu dvě konvergující podposl. jedné posl., pak $x=y$, tudíž $x,y \in K_1 \cap K_2$

→ musí konvergovat ke stejnému bodu.