Kompaktní prostory:

Df: (X,d) je kompaktní, pokud každá $(x_n)_n$ má konvergentní podposl. v X.

Platí:

A kompaktní => A omezená a uzavřená

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní v d_e $\Leftarrow\Rightarrow$ A je omezená a uzavřená

Rozhodněte o kompaktnosti v (d_e)

Stačí určit omezenost a uzavřenost

-> většinou neostré rovnosti jsou uzavřené

1) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^6 + y^6 \le 1\} = M_1$

2) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 \le 1\} = M_2$

3) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=5,\ xy+yz+xz=8\} = M_3$

M_1:

- je omezená, jelikož $|x|, |y| \le 1$.
- je uzavřená: Nechť $f(x,y) = x^6+y^2$ je spojitá. Dále $M_1 = f^{-1}((-\infty,1])$ // $f^{-1}([0,1])$

$(-\infty,1]$ je uzavřená množina v $(\mathbb{R}, d_e)$ -> vzor musí být také uzavřený

<- Pro $\forall x_n > 1$, $\lim_{-\infty} x_n$

$$f^{-1}((-\infty,1]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in (-\infty,1]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x^6+y^6 \le 1\} = M_1$$

M_2:

- Pro libovolně velký kladný x^3 můžu vybrat libovolně velký záporný y^3.
- Není tedy omezená. Tudíž nebude ani kompaktní.

M_3:

Uzavřenost: $f(x,y,z) = x+y+z$, $g(x,y,z) = xy+yz+xz$, spojité a

$$M_3 = f^{-1}(\{5\}) \cap g^{-1}(\{8\})$$ ✓

Jednobodové množiny jsou uzavřené. Průnik uzavřených je uzavřený.

Omezenost:

$$(x,y,z) \in M_3 \implies x+y+z = 5 \quad /^2 \qquad x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz = 25$$
$$xy+yz+xz = 8 \quad / \cdot (-2)$$
$$\| \qquad x^2+y^2+z^2 = 9$$

$\to \overline{B}(0,3): x^2+y^2+z^2 \leq r$

$\implies M_3 \subseteq \overline{B}(0,3) \implies M_3$ je omezená, uzavřená, tudíž je kompaktní

Př:

Mějme mn. X. Charakterizujme kompaktní podmnožiny (X, d_{disk})

Disk: Všechny body, co nejsou identita, mají vzdálenost 1.

Řešení: $A \subseteq X$ kompaktní $\iff$ A konečná

Konečná $\implies$ kompaktní:

Nechť $(x_n) \subseteq A$ nekonečná. Tudíž alespoň jeden bod se opakuje nekonečně krát.

Pak $\exists y: x_n = y$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. Označme $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n = y\}$

Pak $(x_n)_{n \in M}$ konstantní, tedy konvergentní v $A \implies A$ je kompaktní.

Kompaktní $\implies$ konečná (obměnou)

Nekompaktní $\implies$ Nekonečná

($\exists$ prostá posl (x_n) v A).

Nechť $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ je podposl. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x \in A$. Pak $x_{n_k} \not\to x$,

neboť $d_{disk}(x_{n_k}, x) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (až na nejvýše jedno $k \in \mathbb{N}$)

Např.: $\overline{B}(0,1)$ je omezená, uzavřená, ale není kompaktní v $(\mathbb{R}, d_{disk})$.

Df: Cauchyovská posl. $x(x_n)$ pokud $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m,n \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Platí: (x_n) konvergentní $\Rightarrow$ (x_n) Cauchyovská

$\not\Leftarrow$

$\Rightarrow$ Pokud je ale prostor X úplný, pak platí $\Leftarrow$.

Pokud X kompaktní $\Rightarrow$ X úplný

$\not\Leftarrow$

$((0,1), d_e)$ není úplný:

$\Rightarrow$ Vezmu (x_n) konvergující k 1.

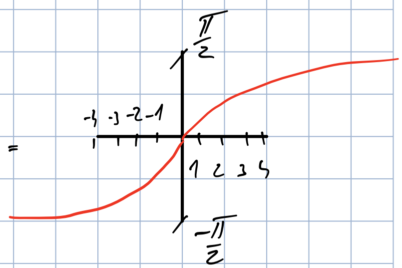
Takže bude Cauchyovská. Ale $1 \notin (0,1)$

Stejně tak $(\mathbb{Q}, d_e)$ není úplná

Čísla se vždy odmocninám přibližují ale množina $\mathbb{Q}$ odmocniny neobsahuje.

$A \subseteq (\mathbb{R}^n, d_e)$ je úplná $\Leftrightarrow$ A je uzavřená.

Příklad: $d(x,y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|$, $x, y \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arctg}(x) =$ 

1) Dokažte, že $(\mathbb{R}, d)$ je metrický prostor

2) Spočtěte diameter $(\mathbb{R})$ v $d := \sup\{d(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

3) Je $(\mathbb{R}, d)$ kompaktní?

4) Je $(\mathbb{R}, d)$ úplný?

1) a) $0 = d(x,y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| \Leftrightarrow x = y$

- platí, jelikož arctg je prostá fce

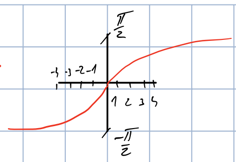
b) $d(x,y) = d(y,x)$ $\quad |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| = |\operatorname{arctg}(y) - \operatorname{arctg}(x)|$

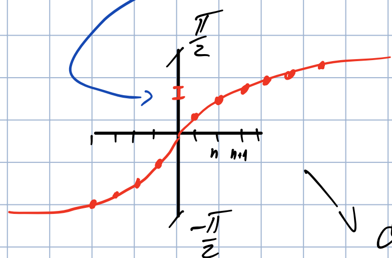
c) Δ nerov.

$d(x,z) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(z)| = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y) + \operatorname{arctg}(y) - \operatorname{arctg}(z)| \leq$

$\leq |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| + |\operatorname{arctg}(y) - \operatorname{arctg}(z)| = d(x,y) + d(y,z)$.

2) Diametr je π —:





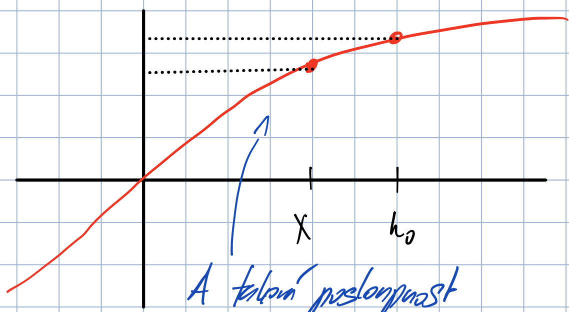
$d(n, n+1) = |\text{arctg}(n) - \text{arctg}(n+1)| =$

3) Nechť $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$

Nechť $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ podposl. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Vezmeme lib. $x \in \mathbb{R}$ a ukážeme, že $a_{n_k} \not\to x$ v d.

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{arctg}(x) < \frac{\pi}{2}$. Označme $r = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(x) > 0$. Dále $\text{arctg}(a_{n_k}) \xrightarrow{k \to \infty} \frac{\pi}{2}$,

$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, \ \underline{\text{arctg}(a_{n_k}) > \frac{\pi}{2} - \frac{r}{2}}$



A taková posloupnost pro $\forall k > k_0$ nemůže konvergovat k x.

$$r = \left|\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(x)\right| = \left|\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(a_{n_k}) + \text{arctg}(a_{n_k}) - \text{arctg}(x)\right| \leq \underline{\left|\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(a_{n_k})\right|} + \left|\text{arctg}(a_{n_k}) - \text{arctg}(x)\right| \leq$$

$$\leq \underline{\frac{r}{2}} + \left|\text{arctg}(a_{n_k}) - \text{arctg}(x)\right|.$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2} \leq \left|\text{arctg}(a_{n_k}) - \text{arctg}(x)\right| = d(a_{n_k}, x) \ \forall k \geq k_0 \Rightarrow a_{n_k} \not\to x.$$

Tedy $(\mathbb{R}, d)$ není kompaktní.

4) Stejný důkaz jako u 3 lze použít pro dokázání neúplnosti.