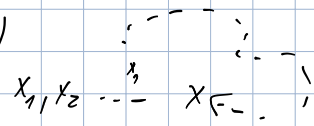
(X,d) m.p., $x_n \to x \overset{?}{\Rightarrow} \{x_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ je kompaktní.

- $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ posloupnost $\not\Rightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty}$ je podposl. posl $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ($(a_n)_{n=1}^{\infty}$ může být konstantní).

- M je omezená, neboť $\forall n\in\mathbb{N}: d(x_n,x) \le \underbrace{d(x_1,n)}_{r} \Rightarrow M \subseteq \bar{B}(x,r)$



špatně!

Př: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ → zjistili jsme, že je nulová jen v jednom bodě! Ne všude, abychom to mohli použít jako nulovou funkci.

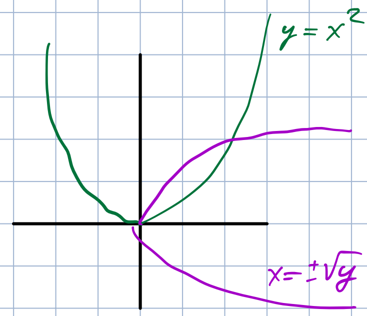
$$f_x(0,0)=0 \overset{\checkmark}{\ } \overset{\times}{\Rightarrow} f_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_x(0,0)\right)=0$$

Věta o implicitních funkcích:

Mějme $\underbrace{y-x^2}_{F_1(x,y)}=0$ .... $y(x)=x^2$ lze vyjádřit jednoduše

$x(y) \overset{?}{=} \pm\sqrt{y}$ už tak jednoduše ne

Problém: derivace funkce x^2 v bodě 0 nulová



Toto není graf funkce

Věta:

Nechť $n,m\in\mathbb{N}$, $F_j:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}$, $j=1\text{—}n$, $\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$, $\tilde{y}\in\mathbb{R}^m$

nechť platí:

$$F_j(\tilde{x},\tilde{y})=0,\quad j=1\text{—}n$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(\tilde{x},\tilde{y}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(\tilde{x},\tilde{y}) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(\tilde{x},\tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0$$

Pak $\exists U$ okolí bodu $\tilde{x}$ v $\mathbb{R}^n$ a V okolí bodu $\tilde{y}$ v $\mathbb{R}^m$, t.ž. $\forall x\in U\ \exists! y\in V: F_j(x,y)=0$. $\forall j=1\text{—}m$

Tedy y lze vyjádřit jako funkci $\varphi(x)$.

Př:

Dokažte, že $x^3+y^3-2xy=0$. Definuje na okolí bodu $[1,1]$ funkci y proměnné x.
Spočítejte $y'(1)$, $y''(1)$

Řešení:

Označme $F(x,y) = x^3+y^3-2xy$, $n=m=1$, $\tilde{x}=1$, $\tilde{y}=1$

Ověříme podmínky věty o impl. funkcích

$F(\tilde{x},\tilde{y}) = F(1,1) = 1^3+1^3-2\cdot1\cdot1 = 0$ ✓

Derivuju podle funkce, kterou chci vyjádřit — zde chci y

→ tady to ani nebyla matice...

$F_y(x,y) = 3y^2-2x$, v bodě $(1,1)$: $F_y(1,1) = 3-2 = \underline{1 \neq 0}$ ✓

VOIF $\Rightarrow$ $\exists U$ okolí bodu 1 v $\mathbb{R}$ a $\exists V$ okolí bodu 1 v $\mathbb{R}$, že $\forall x\in U\ \exists!\, y\in V: x^3+y^3-2xy=0$

$\Rightarrow$ můžeme vyjádřit y na tomto okolí jako funkci proměnné x.

Víme: $\forall x\in U: F(x,y(x)) = 0$

je otevřená

tudíž tohle je konstantní nula na otevřené množině $\Rightarrow$ pak to má 0 derivaci

$\Rightarrow \forall x\in U: F'(x,y(x))\ (= F_x(x,y(x))) = 0$ není podle čeho jiného derivovat.

$$\left(x^3+(y(x))^3-2xy(x)\right)' = 3x^2+3(y(x))^2\cdot y'(x)-2y(x)-2xy'(x)$$

Jelikož bod $1=\tilde{x}\in U$, pak $0 = F'(1,y(1)) = F'(1,1)$?

→ Tohle víme z předchozího výpočtu

prakticky explic. dosazením, když víme $F(\tilde{x},\tilde{y})=0$

$= 3\cdot1+3\cdot1^2\cdot y'(1)-2\cdot1-2\cdot1\cdot y'(1) = 3+3y'(1)-2-2y'(1) = 1+y'(1)$.

$\Rightarrow \underline{\underline{y'(1) = -1}}$

... $\forall x\in U: F(x,y(x))=0 \Rightarrow F'(x,y(x))$ je konstantní na $V \Rightarrow F''(x,y(x))=0$ na U.

$$F''(x,y(x)) = \left(3x^2+3(y(x))^2\cdot y'(x)-2y(x)-2xy'(x)\right)' = 6x+6y(x)\cdot y'(x)\cdot y'(x)+3(y(x))^2\cdot y''(x)$$
$$-2y'(x)-2y'(x)-2xy''(x).$$

Nyní speciálně: Pro bod $x=1$ platí: (platí $y(1)=1$, $y'(1)=-1$)

$0 = 6+6\cdot1\cdot(-1)\cdot(-1)+3\cdot(1)^2\cdot y''(1)-2\cdot(-1)-2\cdot(-1)-2\cdot1\cdot y''(1) \Rightarrow \underline{\underline{y''(1) = -16}}$

Př:

Dokažte, že existuje funkce $z(x,y)$, $t(x,y)$ splňující na okolí bodu $\underbrace{x=1, y=-1, z=2, t=0}_{\text{bod v } \mathbb{R}^4}$

$x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2-t^3=0$ a $x+y+z-t-2=0$.

Spočtěte druhé derivace funkcí z a t v bodě $(1,-1,2,0)$.

Řešení:

$n=2, m=2, \tilde{x}=[1,-1], \tilde{y}=[2,0]$ $\quad F_1(x,y,z,t)=x^2+y^2-\frac{z^2}{2}-t^3$

$F_2(x,y,z,t)=x+y+z-t-2$

Předpoklad 1:

$F_1(\tilde{x},\tilde{y}) = F_1(1,-1,2,0) = 1+1-2-0=0$ ✓

$F_2(\tilde{x},\tilde{y}) = F_2(1,-1,2,0) = 1-1+2-0-2=0$ ✓

Pokud první podmínka není splněna, je asi špatně zadaný příklad.

Předpoklad 2:

$$\frac{\partial}{\partial z}F_1(x,y,z,t) = \left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot 2z = -z \qquad \frac{\partial}{\partial z}F_2(x,y,z,t) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(x,y,z,t) = -3t^2 \qquad \frac{\partial}{\partial t}F_2(x,y,z,t) = -1$$

Dostaneme tedy matici 2x2:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}F_1(1,-1,2,0) & \frac{\partial}{\partial t}F_1(1,-1,2,0) \\ \frac{\partial}{\partial z}F_2(1,-1,2,0) & \frac{\partial}{\partial t}F_2(1,-1,2,0) \end{pmatrix} \overset{\det}{=} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2-0 \neq 0 \ ✓$$

$\Rightarrow \exists\, U$ okolí bodu $(1,-1)$ v $\mathbb{R}^2$ a V okolí bodu $(2,0)$ v $\mathbb{R}^2$, t.ž.

$\forall (x,y) \in U : \exists! (z,t) \in V : x^2+y^2-\frac{z^2}{2}-t^3=0$ a $x+y+z-t-2=0$

… máme funkce $z(x,y), t(x,y)$.

Víme: $\forall (x,y) \in U : F_1(x,y,z(x,y),t(x,y)) = 0 = F_2(x,y,z(x,y),t(x,y))$.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}F_1(x,y,z(x,y),t(x,y)) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y,z(x,y),t(x,y)).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y,z(x,y),t(x,y)) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}F_2(x,y,z(x,y),t(x,y)).$$

Tedy: $0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(F_1(x,y,z(x,y),t(x,y))\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2-\frac{1}{2}(z(x,y))^2-(t(x,y))^3\right) =$

$= 2x - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot z(x,y)\cdot z_x(x,y) - 3t^2(x,y)\cdot t_x(x,y)$

teď dosadím bod $(1,-1)$

Platí: $z(1,-1)=2,\ t(1,-1)=0$

$0 = 2 - 2z_x(1,-1)$

$0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(F_1(x,y,z(x,y),t(x,y))\right) = 2y - z(x,y)\cdot z_y(x,y) + 3t^2(x,y)\cdot t_y(x,y)$ ... v bodě $(1,-1)$

$0 = -2 - 2\cdot z_y(1,-1)$

$0 = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y,z(x,y),t(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x+y+z(x,y)-t(x,y)-2\right) = 1 + z_x(x,y) - t_x(x,y)$

V bodě $(1,-1)$: $0 = 1 + z_x(1,-1) - t_x(1,-1)$

$0 = \frac{\partial}{\partial y} F_2(x,y,z(x,y),t(x,y)) = 1 + z_y(x,y) - t_y(x,y) = 1 + z_y(x,y) - t_y(x,y)$

V bodě $(1,-1)$: $0 = 1 + z_y(1,-1) - t_y(1,-1)$

Tedy máme rovnosti:

$0 = -2 - z_x(1,-1)$

$0 = 1 + z_x(1,-1) - t_x(1,-1)$

$0 = 2 - z_y(1,-1)$

$0 = 1 + z_y(1,-1) - t_y(1,-1)$

$$\boxed{\begin{aligned} -2 &= -2z_x(1,-1) \\ -1 &= z_x(1,-1) - t_x(1,-1) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2 &= -2z_y(1,-1) \\ -1 &= z_y(1,-1) - t_y(1,-1) \end{aligned}}$$

Koeficienty jsou stejné!

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Tedy řešení existuje

$\Rightarrow \quad z_x(1,-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad t_x(1,-1) = 2$

$ \quad z_y(1,-1) = -1 \qquad\ \ t_y(1,-1) = 0$

Víme: na U platí: $\frac{\partial}{\partial x} F_1(x,y,z(x,y),t(x,y)) = 0 \Rightarrow$ máme nulové parc. derivace

- $0 = (F_1)_{xx}(x,y,z(x,y),t(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - z(x,y)\cdot z_x(x,y) - 3t^2(x,y)\cdot t_x(x,y)\right) =$

$= 2\cdot z_x(x,y)\cdot z_x(x,y) - z_x(x,y)\cdot z_{xy}(x,y) - 6t(x,y)\cdot(t_x(x,y))^2 - 3t^2(x,y)\cdot t_{xx}(x,y)$

V bodě $(1,-1)$ máme $z(1,-1)=2,\ t(1,-1)=0,\ z_x(1,-1)=1,\ t_x(1,-1)=2$

$\Rightarrow\ 0 = 2 - 1 - 2z_{xx}(1,-1) - 0 - 0 \Rightarrow \underline{-1 = -2z_{xx}(1,-1)}.$ $\quad z_{xx}(1,-1) = \frac{1}{2}$

- $0 = (F_2)_{xx}(x,y,z(x,y),t(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + z_x(x,y) - t_x(x,y)\right) = z_{xx}(x,y) - t_{xx}(x,y)$

  V bodě $(1,-1)$ $\quad z_{xx}(1,-1) = t_{xx}(1,-1) = \underline{\frac{1}{2}}$

- $0 = (F_1)_{yy}(x,y,z(x,y),t(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y - z(x,y)\cdot z_y(x,y) - 3t^2(x,y)\cdot t_y(x,y)\right) =$

  $= 2 - (z_y(x,y))^2 - z(x,y)\cdot z_{yy}(x,y) - 6t(x,y)\cdot(t_y(x,y))^2 - 3t^2(x,y)\cdot t_{yy}(x,y)$

  V bodě $(1,-1)\ldots \quad 0 = 2 - 1 - 2z_{yy}(1,-1) - 0 - 0 \Rightarrow \underline{z_{yy}(1,-1) = \frac{1}{2}}$

- $0 = (F_2)_{yy}(x,y,z(x,y),t(x,y)) = \ldots = z_{yy}(x,y) - t_{yy}(x,y) \rightarrow t_{yy}(1,-1) = \underline{z_{yy}(1,-1) = \frac{1}{2}}$