1. Nechť $g(x,y)=\log(x^2+y^2)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$.
   - Rozhodněte, pro které body $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ platí $g_{xx}(x,y)+g_{yy}(x,y)=0$.
   - Určete, ve kterých bodech $\mathbb{R}^2$ existuje totální diferenciál funkce g.

$\log(u)' = \frac{1}{u}$

$$g_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\log(x^2+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\log(x^2+y^2)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2)+\frac{\partial}{\partial x}(y^2)}{x^2+y^2}\right) = 2\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = 2\cdot\frac{(x^2+y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x) - x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$2\cdot\frac{(x^2+y^2)\cdot 1 - x\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2} = 2\cdot\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\cdot\frac{(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = g_{xx}(x,y)$$

$$g_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\log(x^2+y^2)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{(x^2+y^2)\cdot 1 - y\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right)}{(x^2+y^2)^2} = 2\cdot\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\cdot\frac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2} = g_{yy}(x,y)$$

pro $(x,y)\neq(0,0)$, tedy $g_{xx}(x,y)+g_{yy}(x,y)=0$?

Tedy $2\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2\cdot\frac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$

$$\frac{-2x^2+2y^2-2y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \ \ldots\ \frac{0}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tedy je rovno nule $\forall x,y\neq 0$.

g má totální diferenciál v bodech, ve kterých jsou všechny parciální derivace spojité.

Tedy v bodech, v jejichž okolí je g_x a g_y spojitá.

$g_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$ $\quad g_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$. Obě funkce jsou spojité na celém svém definičním oboru, s výjimkou 0. Tedy:

Funkce g má totální diferenciál v bodech $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

2. Ověřte platnost následujícího výroku. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pokud existuje limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, potom existují limity $\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} f(x,y))$ a $\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} f(x,y))$ a rovnají se.
Hint: Uvažujte funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{y}) + y\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \text{ a } y \neq 0,\\ 0, & x = 0 \text{ nebo } y = 0.\end{cases}$$

Pro $f(x,y) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

je dvojnásobná limita rovna:

$$\lim_{x\to0} x \cdot \underline{\lim_{y\to0} \sin\left(\frac{1}{y}\right)} + \lim_{y\to0} y \cdot \underline{\lim_{x\to0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

(použití linearity a distribuce lim)

Avšak tyto dvě limity neexistují, tudíž ani celá limita nemůže existovat.

Naopak:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\sin\left(\frac{1}{y}\right) + \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 + 0 = 0$$

Zde použiji větu, že jakmile mám $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)g(x)$ a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$ je definovaná v ryzím okolí bodu x_0 a funkce $g(x)$ je v ryzím okolí bodu x_0 ohraničená, tedy že $\exists M \geq 0$ t.ž. v daném okolí $|g(x)| \leq M$, pak

Konkrétně pak lze aplikovat na: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)g(x) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\sin\left(\frac{1}{y}\right) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

kde

$f(x) = x$ $\qquad$ $f(x) = y$

$g(x) = \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ $\qquad$ $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Funkce sinus je na celém definičním oboru ohraničená (obor hodnot je $\langle -1, 1\rangle$) a zároveň $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$

Tudíž: celá limita existuje a je nula.

Tudíž existence dvojné limity neimplikuje existenci dvojnásobné limity. Zároveň ani dvojnásobné limity se nemusejí rovnat.

Šlo to dělat pomocí policajtů :

$$\leq \quad x \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \leq$$

$$0 \leq \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right| + \left| y \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| + |y|$$

pak platí $\quad 0 \leq |f(x,y)| \leq |x| + |y|$

$\rightarrow \lim = 0$