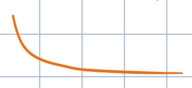
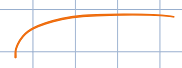
1. Nechť (X,d) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů v X konvergující k bodu $x \in X$. Rozhodněte, zda množina $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ je kompaktní. (1 bod)

Kompaktní množina je právě omezená a uzavřená podmnožina.

Omezená množina je taková podmnožina X, pokud $\exists a,b\ \forall x \in X: a < x < b$

– Jelikož je zadaná posloupnost pro $n = \mathbb{N}$ konvergentní, tak musí být zároveň i omezená.

Pokud by posl. vypadala takto:  nebo 

tak ji vždy můžu z jedné strany zastropovat limitou a z druhé strany prvním prvkem.

Uzavřená množina je taková podmnožina $X \subseteq P$, pokud $\forall (x_n)_n \subseteq X$ konvergentní v P

$\lim_n x_n \in X$.

Tedy pokud všechny posl. obsahující prvky z množiny X konvergují k x, pak toto $x \in X$.

– Jelikož výsledná množina obsahuje i prvek x, k němuž zadaná posloupnost konverguje,

a díky tomu že pokud posl. konverguje k x, konverguje k němu i její podposl.,

tak platí, že každá podposl. je konvergentní k bodu obsaženém v dané množině.

Tudíž tvrzení platí.

reminder: $f(x) = \sin(x)$ $g(y) = y^2$

$F(x) = \sin(x^2)$ $u = \sin(x)$ $f(g(y))$

$F'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$ $v = xy$

2. Nechť $g(u,v) = u^3e^v - \cos(u)v$ pro $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, a $f(x,y) = g(\sin(x), xy)$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pomocí řetízkového pravidla spočtěte f_x a f_y ve všech bodech, kde existují. (2 body)

$$f(x,y) = f(g(u,v)), \text{ kde } u = \sin(x),\ v = xy$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \left(3u^2e^v + \sin(u)v,\ u^3e^v - \cos(u)\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos(x) \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \cos(x) \cdot \left(3u^2e^v + \sin(u)v\right) + y\left(u^3e^v - \cos(u)\right) = \cos(x) \cdot \left(3 \cdot \sin^2(x)\, e^{xy} + xy \cdot \sin(\sin(x))\right) + y \cdot \left(\sin^3(x)\, e^{xy} - \cos(\sin(x))\right)$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(3u^2e^v + \sin(u)v,\ u^3e^v - \cos(u)\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} =$$

$$= x \cdot \left(u^3e^v - \cos(u)\right) = x \cdot \left(\sin^3(x)\, e^{xy} - \cos(\sin(x))\right)$$

To platí pro všechny body, kde existuje totální derivace. Jelikož mají ale obě funkce spojité derivace na celém oboru $(\sin(x), xy)$, existuje i stejná totální diferenciál.

3. Rozhodněte, zda pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

platí $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$. (2 body)

Podle přednášky, tvrzení 4.2.1 skript pana Pultra platí, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, pokud jsou druhé parciální derivace definovány a jsou spojité na nějakém okolí bodu (x,y). Aby mohla rovnost $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ platit, je potřeba ověřit spojitost: Předpokládáme, že $f(x,y)$ je v $(0,0)$ spojitě dodefinovaná, tedy je limita f_{xy} v 0 rovna 0.

$$(x^2-y^2)^3 = x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{x^6 - 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 - 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)^3 - 6x^4y^2 - 6x^2y^4}{(x^2+y^2)^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)^3}{(x^2+y^2)^3} - \dots - \dots$$

již zde limita neexistuje

Tudíž ani spojitost pro f_{xy} v $(0,0)$ nelze zaručit, tedy $f_{xy} \neq f_{yx}$ pro $f(x,y)$ v $(0,0)$.