Domácí úkol z MA2

Úkol číslo 4

Definition 0.1 *Nechť d_1, d_2 jsou metriky na množině X. Metriky d_1, d_2 se nazývají*

- silně ekvivalentní, *pokud existují $A, B \in (0, \infty)$ splňující, že pro každé $x, y \in X$, $Ad_1(x, y) \le d_2(x, y) \le Bd_{\underset{1}{\cancel{2}}}(x, y)$,*
- ekvivalentní *(nebo také* topologicky ekvivalentní*), pokud pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v X a každé $x \in X$ platí, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k x v metrice d_1 právě tehdy, když $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k x v metrice d_2.*

Následující informace lze v úkolu využít:
Platí, že každé dvě silně ekvivalentní metriky jsou topologicky ekvivalentní. Topologická ekvivalence zachovává otevřenost, uzavřenost a také kompaktnost množin. Silná ekvivalence kromě toho zachovává také Cauchyovskost posloupností a úplnost množin.

1. Uvažujte na $\mathbb{R}$ metriku $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$, kterou jsme probírali na posledním cvičení. Nechť d_e značí Eukleidovskou metriku na $\mathbb{R}$.
   - Rozhodněte, zda metriky d a d_e jsou silně ekvivalentní.
   - Rozhodněte, zda metriky d a d_e jsou topologicky ekvivalentní.

   (2 body)

2. Označme $\mathcal{C}([0, 1])$ množinu všech funkcí $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, které jsou spojité na intervalu $[0, 1]$. Definujme zobrazení

   $$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}, \quad f, g \in \mathcal{C}([0, 1]).$$

   - Dokažte, že $(\mathcal{C}([0, 1]), d)$ je metrický prostor.
   - Dokažte, že množina $\overline{B}(0, 1)$ je uzavřená, omezená, ale není kompaktní v prostoru $(\mathcal{C}([0, 1]), d)$.
     Hint: Abyste dokázali, že množina $\overline{B}(0, 1)$ není kompaktní, uvažujte posloupnost funkcí $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$.

   (3 body)

1)a) Silná ekvivalentnost:

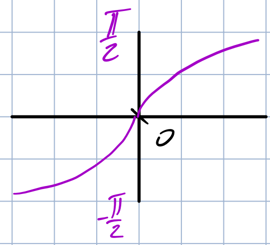
$$A d(x,y) \le d_e(x,y) \le B d(x,y)$$

Tuto část nerovnosti jsme schopni získat.

Metrika d je omezena hodnotou do intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$

zatímco metrika d_e je omezena zdola do intervalu $[0, \infty)$.

Bůno nechť $x = 0$, $y \in \mathbb{R}^+$ (chceme získat co nejvyšší hodnotu u d metriky).



Poté $\lim_{y \to \infty} d(x,y) = \frac{\pi}{2}$, zatímco $\lim_{y \to \infty} d_e(x,y) = +\infty$.

→ že mám to ani v okolí 0 nestřílí někam do $\pm\infty$.

Jelikož je $\operatorname{arctg}(x)$ funkce spojitá s $\lim_{x \to 0} \operatorname{arctg}(x) = 0$, tak existuje $A \in (0, \infty) : \forall x,y \in \mathbb{R} \quad Ad(x,y) \le d_e(x,y)$.

Druhá část však již neplatí. Použijeme stejný argument, co minule:

$\lim_{y \to \infty} d(0,y) = \frac{\pi}{2}$, zatímco $\lim_{y \to \infty} d_e(0,y) = +\infty$. → tedy $d_e(x,y)$ není omezená.

Bůno opět $x = 0$, $y < y' \in \mathbb{R}^+$. Pak existuje $B \in (0, \infty)$ t.ž. $d_e(x,y) \le Bd(x,y)$.

Nyní nechť $d_e(x,y') > Bd(x,y) \ge d_e(x,y)$ → což takové y' existuje, protože $\lim_{x \to \infty} d_e(0,y) = \infty$

Takové y' existuje, ale to je spor s definicí silně ekvivalentní metriky.

Metriky nejsou silně ekvivalentní.

1)b) Topologická ekvivalentnost:

Nechť mám posl. $(x_n) \xrightarrow{\infty} x$, oboje náležící $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Nechť $d_e(x_n, x) \to 0$, tedy že limita existuje a je nula. Nyní ověřme, zda-li existuje limita pro metriku d.

Nechť sporem $d(x_n, n) \not\to 0$, tedy $\exists \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : d(x_n, x) > \varepsilon$.

Jelikož je ale funkce arctg spojitá a omezená, víme, že potom $\frac{\pi}{2} > d(x_n, x) > \varepsilon > d_e(x_n, x)$,

tedy zejména $d_e(x_n, x) < \varepsilon$
$d(x_n, x) > \varepsilon$

Díky předpisu $d(x,y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|$ však můžeme usoudit, že taková situace nastane pouze pokud by i $d_e(x_n, x) > \varepsilon$. Což je spor s předpokladem.

$\Leftarrow$ Nechť $d(x_n, x) \to 0$. Kdyby $d_e(x_n, x) \not\to 0$, platí tvrzení jako v opačné implikaci, jen s obrácenými metrikami.

Obecně lze říci, že jde o topologickou ekvivalentnost, jelikož existuje spojité f a f^{-1}, $f: (X, d_1) \to (X, d_2)$. Pro dvě spojité prosté funkce jsme schopni takové zobrazení vytvořit, tedy „namapovat" jednu metriku na druhou.

Metriky jsou topologicky ekv.

---

2) a)

Dokažte, že $(C([0,1]), d)$ je metrický prostor:

- reflexivita
- symetrie
- $\triangle$ nerovnost

— předpokládám zmíněnou spojitost funkcí na intervalu $[0,1]$

- reflexivita:

$$0 = d(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)|\} \iff f \equiv g$$

- symetrie:

$$d(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)|\} = \max\{|g(x) - f(x)|\} = d(g,f)$$

- $\triangle$ nerovnost:

$$d(f,h) = \max\{|f(x) - g(x) + g(x) - h(x)|\} \leq \max\{|f(x) - g(x)|\} + \max\{|g(x) - h(x)|\}$$

$$= d(f,g) + d(g,h).$$

2b) Dokažte uzavřenost, omezenost ale nekompaktnost $\overline{B}(0,1)$ v prostoru $(C([0,1]), d)$.

$$\overline{B}(0,1) = \{f(x) \in C([0,1]), x \in [0,1] : d(0, f(x)) \leq 1\}$$

Uzavřenost:

Nechť mám $(x_n)_1^\infty \in \overline{B}(0,1)$. Dále nechť $(x_n) \xrightarrow{\infty} x \in M$.

Jelikož $\overline{B}(0,1) = [-1,1]$, tedy tvoří uzavřený interval, bude i pro každou posloupnost $\in \overline{B}(0,1)$ platit, že konverguje k $x \in \underline{\overline{B}(0,1)}$.

$\leftrightarrow$ přenesení pro význam funkčních hodnot funkcí.

Omezenost:

Nechť mám $\overline{B}(0,1)$ jako výše. Aby $\overline{B}(0,1)$ byla omezená množina, musí platit že $\exists x \in C([0,1])$ a $r > 0 \in \mathbb{R}$: $\forall y \in \overline{B}(0,1)$: $d(x,y) < r$

Jelikož množina $\overline{B}(0,1)$ má funkční hodnoty všech svých funkcí shora omezené na $[0,1]$ již z definice dané množiny, můžeme nahlédnout, že tento výrok bude splněn.

Nekompletnost:

Metrický prostor je kompletní, obsahuje-li v něm každá posl. konvergentní podposl.

Mějme $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy $(f_n)_{n=1}^{\infty} = (x^0, x^1, x^2, \ldots)$ pro $x \in [0,1]$.

Nechť $x \in (0,1)$. $\lim_{n \to \infty} f_n = 0$. Nechť $f_n \xrightarrow{\infty} 0$. Pak musí platit, že $d(f_n, 0) \longrightarrow 0$.

<= Takovou volbu si můžeme dovolit, jelikož definice má platit pro každou posloupnost v daném prostoru.

Jenže pro zadanou metriku $d(f_n, 0) = 1$, jelikož maximální prvek bude $f_0 = 1$.

Tudíž taková posl. neobsahuje konvergentní podposl. v daném metrickém výrazu.