1. Rozhodněte, zda podmínka $F_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$ je nutná vě větě o implicitních funkcích v $\mathbb{R}^2$.

   Přesněji: Rozhodněte, zda existuje funkce $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a bod $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in \mathbb{R}^2$ takové, že $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, $F_y(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, ale přesto na nějakém okolí bodu $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ pro každé x existuje právě jedno y takové, že $F(x, y) = 0$?

2. Ukažte, že vzahy $x = u + v^2$ a $y = u^2 - v^3$ definují na nějakém okolí bodu $[3, 3]$ funkce $u(x, y), v(x, y)$, které splňují $u(3, 3) = 2$, $v(3, 3) = 1$. Dále, spočtěte $z_{xy}(3, 3)$, pokud funkce z je na tomto okolí definována jako

$$z(x, y) = 2u(x, y)v(x, y).$$

ověřujeme pro okolí [3,3], tudíž přímo dosadíme.

$$F_1(x,y,u,v) = u + v^2 - x \qquad u(3,3) = 2 \Rightarrow u = 2$$

$$F_2(x,y,u,v) = u^2 - v^3 - y \qquad v(3,3) = 1 \Rightarrow v = 1$$

Předpoklad 1:

$$F_1(x,y,u,v) = F_1(3,3,2,1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

$$F_2(x,y,u,v) = F_2(3,3,2,1) = 4 - 1 - 3 = 0 \quad ✓$$

Předpoklad 2: (nenulový determinant)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2v \\ 2u & -3v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad ✓$$

Lze použít VOIF.

$z(x,y) = 2u(x,y)\,v(x,y)$ Chceme $z_{xy}(x,y)$

$z_x(x,y) = 2u_x(x,y)\cdot v(x,y) + 2u(x,y)\cdot v_x(x,y)$ Potřebujeme tedy spočítat:

$$z_{xy}(x,y) = \underline{2u_{xy}(x,y)}\cdot v(x,y) + \underline{2u_x(x,y)}\cdot \underline{v_y(x,y)} + \underline{2u_y(x,y)}\cdot \underline{v_x(x,y)} + 2u(x,y)\cdot \underline{v_{xy}(x,y)}$$

$F_1(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0 = F_2(x,y,u(x,y),v(x,y))$ na okolí $[3,3]$

$$F_1(x,y,u(x,y),v(x,y)) = u(x,y) + (v(x,y))^2 - x$$
$$F_2(x,y,u(x,y),v(x,y)) = (u(x,y))^2 - (v(x,y))^3 - y$$

Nejdříve spočítáme první derivace:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,u(x,y),v(x,y)) = u_x(x,y) + 2v(x,y)\cdot v_x(x,y) - 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 2u(x,y)\cdot u_x(x,y) - 3(v(x,y))^2\cdot v_x(x,y)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(3,3,2,1) = u_x(3,3) + 2\cdot v_x(3,3) - 1 = 0 \quad \rightarrow u_x(3,3) = 1 - 2v_x(3,3)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(3,3,2,1) = 4u_x(3,3) - 3v_x(3,3) = 0 \rightarrow 4 - 8v_x(3,3) - 3v_x(3,3) = 0$$

$$v_x(3,3) = \frac{4}{11} \qquad u_x(3,3) = \frac{3}{11}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,u(x,y),v(x,y)) = u_y(x,y) + 2v(x,y)\cdot v_y(x,y)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 2u(x,y)\cdot u_y(x,y) - 3(v(x,y))^2 v_y(x,y) - 1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(3,3,2,1) = u_y(3,3) + 2v_y(3,3) = 0 \quad \rightarrow u_y(3,3) = -2v_y(3,3)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}(3,3,2,1) = 4u_y(3,3) - 3v_y(3,3) - 1 \longrightarrow -8v_y(3,3) - 3v_y(3,3) = 1$$

$$v_y(3,3) = \frac{-1}{11} \qquad u_y(3,3) = \frac{2}{11}$$

Nyní na základě prvních derivací spočítáme druhé derivace

$$\frac{\partial F_1}{\partial x\partial y}(x,y,u(x,y),v(x,y)) = u_{xy}(x,y) + 2\cdot v_x(x,y)\cdot v_y(x,y) + 2v(x,y)\cdot v_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x\partial y} = (x,y,u(x,y),v(x,y)) = 2u_y(x,y)\cdot u_x(x,y) + 2\cdot u(x,y)\cdot u_{xy}(x,y) - 6\overbrace{v(x,y)\cdot v_y(x,y)}^{12}\cdot v_x(x,y)$$
$$- 3(v(x,y))^2\cdot v_{xy}(x,y)$$

$$u_{xy}(3,3) = -2v_{xy}(x,y) + \frac{8}{121}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x\partial y}(3,3,2,1) = u_{xy}(3,3) + 2\cdot\frac{4}{11}\cdot\left(-\frac{1}{11}\right) + 2\cdot v_{xy}(3,3) = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x\partial y}(3,3,2,1) = 2\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{11} + 4\cdot u_{xy}(3,3) - 6\cdot\left(\frac{-1}{11}\right)\cdot\left(\frac{4}{11}\right) - 3\cdot v_{xy}(3,3) = 0$$

$$\frac{12}{121} + 4\cdot u_{xy}(3,3) + \frac{24}{121} - 3v_{xy}(3,3) = 0$$

$$\frac{36}{121} + 4\cdot u_{xy}(3,3) - 3v_{xy}(3,3) = 0 \qquad \frac{36}{121} - 8v_{xy}(3,3) + \frac{32}{121} - 3v_{xy}(3,3) = 0$$

$$\frac{68}{121} - 11v_{xy}(3,3) = 0 \Rightarrow v_{xy}(3,3) = \frac{68}{11^3}$$

$$u_{xy}(3,3) = -\frac{48}{11^3}$$

$$u_{xy}(3,3) = -\frac{136}{11^3} + \frac{88}{11^3}$$

Taktéž nyní:

$$z_{xy}(x,y) = 2u_{xy}(x,y)\cdot v(x,y) + 2u_x(x,y)\cdot v_y(x,y) + 2u_y(x,y)\cdot v_x(x,y) + 2u(x,y)\cdot v_{xy}(x,y)$$

$$z_{xy}(x,y) = 2\cdot\left(-\frac{48}{11^3}\right) + \frac{6}{11}\cdot\left(-\frac{1}{11}\right) + \frac{4}{11}\cdot\frac{4}{11} + 4\cdot\frac{68}{11^3} = \frac{-96}{11^3} - \frac{66}{11^3} + \frac{176}{11^3} + \frac{272}{11^3} = \frac{26}{11^2}$$