1. Uvažujte funkci

$$f(x,y) = (x - y^2)(2x - y^2),\ [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Rozhodněte, zda f má v bodě $[0,0]$ ostré lokální minimum vzhledem ke všem přímkám procházejícím bodem $[0,0]$.

(ii) Rozhodněte, zda f má v bodě $[0,0]$ lokální minimum. (Hint: Uvažujte křivku $x = \frac{3}{4}y^2$.)

$$f(x,y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$$

Jelikož je $\mathbb{R}$ otevřená množina, použiji větu z přednášky:

(ii) Pokud je $M \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená, a $[0,0]$ je lokální extrémní bod funkce f, pak všechny její parciální derivace jsou v daném bodě $[0,0]$ nulové, nebo vůbec neexistují.

→ zde je shodou okolností umocněná fce.

$$f_x(x,y) = 4x - 3y^2$$
$$f_y(x,y) = -6xy + 4y^3$$

Hledáme, kde se rovnají nule (zdn)

$$4x - 3y^2 = 0$$
$$y = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$$

$$-6xy + 4y^3 = 0$$
$$-6x \cdot \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} + 4 \cdot \frac{8 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} = 0$$
$$\frac{-12x^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{32 \cdot x^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\to \frac{-36x^{\frac{3}{2}} + 32x^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\frac{-4x^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}} = 0 \to -4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \to -4 \cdot \left(\frac{x \cdot \sqrt{x}}{3 \cdot \sqrt{3}}\right) = 0$$

díky $\sqrt{x}$ musí $x \geq 0$, tedy $\underline{x = 0}$ Dosadím do druhé rovnice:

$$-6 \cdot 0 \cdot y + 4y^3 = 0 \to 4y^3 = 0 \to y^3 = 0 \to \underline{y = 0}$$

Tedy existuje řešení, kdy parciální derivace mají hodnotu 0 a tedy <u>lokální minimum existuje.</u>

(i) Uvažme tedy přímky procházející bodem $[0,0]$ → to jsou $y = ax + 0,\ a \in \mathbb{R}$

Tedy pak $f'(x,y) = (ay - y^2) \cdot (2ay - y^2)$. Nechť $a \neq 0$.

Pro určení minima v bodě $[0,0]$ uvažme minimum na množině jednotkové otevřené koule $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

<- abychom vůbec mohli použít věty z přednášek

dosazení $y = ax$

$$f'(x,y) = 2a^2y^2 - 3ay^3 + y^4$$

Tedy musí být první derivace nulové.

$$f'_x(x,y) = 0 \ ✓$$

$$f'_y(x,y) = 4a^2y - 9ay^2 + 4y^3 = y \cdot (4a^2 - 9ay + 4y^2) = 0$$

$$\to \frac{9ay}{4} + y^2 = -a^2$$
$$\left(y - \frac{9a}{8}\right)^2 = \frac{17a^2}{64}$$
$$\underline{y = \frac{a \cdot (9 \pm \sqrt{17})}{8}}$$

✓ $y = 0 \to ax = 0 \to x = 0$ → adept $f(0,0) = 0$

Výsledek pro y mám ale daný $\forall a \in \mathbb{R}$ dvě řešení rovnice, tudíž takových extrémů by existovalo více a ve libovolném okolí takových bodů lze vybrat $a \in \mathbb{R}$ tak, aby nebyly splněny podmínky ostrého lokálního minima, tedy že $\forall (x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2,\ f(x,y) > f(\text{minimální bod})$.

Tedy nemá ostré min.

2. Nalezněte globální maximum a globální minimum funkce $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ na množině $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 100\}$, pokud existují.

1) Ověříme kompaktnost množiny S:

a) Množina je zjevně omezená

b) Množina je uzavřená, jelikož $h_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ je spojitá a $S = h_1^{-1}\{(-\infty, 100\rangle\}$, kde interval obrazu je uzavřený, tedy výsledek bude taky uzavřený.

Množinu rozdělím na $S_V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 100\}$

a $S_H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 - 100 = 0\}$

S_V: Nyní je S_V otevřená, pokud $[0,0]$ je lokální extrém, pak všechny parciální derivace jsou nulové nebo neexistují. Tedy:

$$\nabla f(a) = 0 \quad \to \quad \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$2x = 0 \to x = 0$

$4y = 0 \quad y = 0$

$6z = 0 \quad z = 0$

Adept na lokální extrém: $(0,0,0)$

S_H: Nyní podle Lagrangeovy věty:

$n = 3,\ m = 1,\ g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-100 = 0$, tedy $M = S_H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x,y,z) = 0\}$

$$\nabla g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \text{ kdy LZ? pokud } \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ vzhledem k podmínce g_1 množiny M takový vektor se v M nenachází!

Pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$ t.ž. $\nabla f((x,y,z)) + \lambda \cdot g_1((x,y,z)) = 0$, tj:

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix} \cdot \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zde není splněno $x^2+y^2+z^2 \le 100$

Pro tyto 3 lambdy dostanu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tedy:

$2x + \lambda 2x = 0 \qquad 2x \cdot (1+\lambda) = 0$

$4y + \lambda 2y = 0 \qquad 2y \cdot (2+\lambda) = 0$

$6z + \lambda 2z = 0 \qquad 2z \cdot (3+\lambda) = 0$

$x^2+y^2+z^2 = 100$

Tedy: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ OR $\lambda = -1,\ \lambda = -2,\ \lambda = -3$

Pro $x = y = z = 0 = 0^2 + 0^2 + 0^2 \neq 100$. ✗

Pro $x \neq 0,\ \lambda = -1$

$2y = 0 \quad y = 0$

$4z = 0 \quad z = 0$

$x^2 = 100 \to x = \pm 10$ ✓

Pro $y \neq 0,\ \lambda = -2$

$-2x = 0 \to x = 0$

$2z = 0 \to z = 0$

$y^2 = 100 \to y = \pm 10$ ✓

Pro $z \neq 0,\ \lambda = -3$

$-4x = 0 \to x = 0$

$-2y = 0 \to y = 0$

$z^2 = 100 \to z = \pm 10$ ✓

Celkem mám tedy následující adepty:

$f((x,y,z)) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

$f(0,0,0) = 0$

$f(10,0,0) = 100$

$f(-10,0,0) = 100$

$f(0,10,0) = 200$

$f(0,-10,0) = 200$

$f(0,0,10) = 300$

$f(0,0,-10) = 300$

Globální extrémy tudíž jsou:

Maximum: $(x,y,z) = (0,0,-10) = (0,0,10)$

Minimum: $(x,y,z) = (0,0,0)$