1. Uvažujte funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

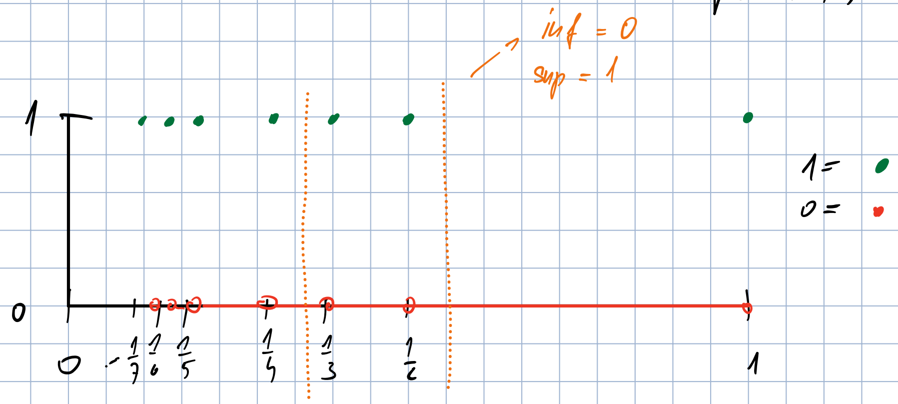
Rozhodněte, zda existuje Riemannuv integrál funkce f na intervalu $[0,1]$. (3 body)

Podmínka existence Riemannova integrálu:

$$f \in R(a,b) \iff \forall \varepsilon\, \exists D : \; 0 \le S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

$$S(D) = \sum_i |a_i - a_{i-1}| \cdot \sup_{[a_i, a_{i-1}]} f$$

$$s(D) = \sum_i |a_i - a_{i-1}| \cdot \inf_{[a_i, a_{i-1}]} f$$



A) Pokud je funkce na částech spojitá, je Riemannovsky integrovatelná. Zde ale spojitá není, jelikož zejména na pravém okolí nuly existuje nekonečně mnoho takových částí, tudíž nebudeme schopni hodnotu validně sečíst.

B) Pokusíme se ověřit tuto podmínku: $f \in R(a,b) \iff \forall \varepsilon\, \exists D : \; 0 \le S(D) - s(D) < \varepsilon.$

Použiji předpoklad, že v jakémkoli intervalu tvořeném sousedními čísly $x, y \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ existuje nekonečně mnoho čísel z $\mathbb{R}$ (to díky nespočetnosti $\mathbb{R}$). Pak musí pro jakékoliv dělení, a tedy i pro jakýkoliv interval daného dělení, platit, že interval obsahuje alespoň 1 číslo $z \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, tedy $f(z) = 0$.

Potom $s(D)$, tedy dolní součet každého dělení je roven 0, jelikož infimum každého intervalu z D je rovno 0.

Tedy $\forall D : s(D) = 0$. Z toho vyplývá, že $f \in R(a,b) \iff \forall \varepsilon\, \exists D : 0 \le S(D) - 0 < \varepsilon \to 0 \le S(D) < \varepsilon$.

Zde využiji pozorování, že s jemnějším dělením D mi klesá i $S(D)$. To proto, že s jemnějším dělením mi přibývá nulových bodů v intervalu a hlavně se mi zmenšuje šířka jednotlivých „obdélníčků", které mají $f(x) = 1$ a tudíž pozitivně přispívají k součtu.

Explicitně tedy $S(D)$ bude klesat. Konkrétně:

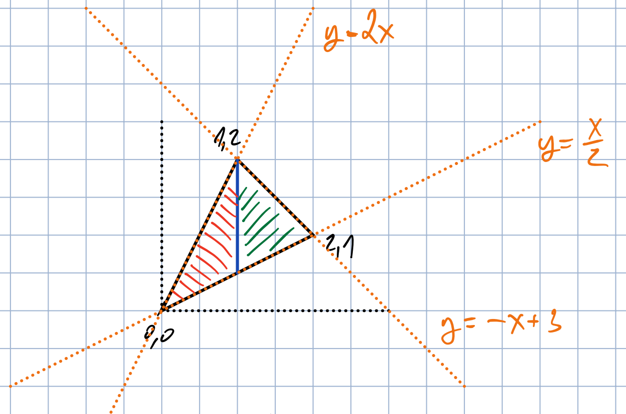
$$\lim_{k \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i - a_{i-1}| \cdot \sup_{[a_i, a_{i-1}]} f \right) = 0.$$

Tedy pro libovolně velké $\varepsilon > 0$ existuje dělení D, t.ž. $0 \le S(D) < \varepsilon$.

Funkce je Riemannovsky integrovatelná.

2. Spočtěte integrál $\int_M x^2y + xy^2dxdy$, kde M je trojúhelník s vrcholy v bodech $[0,0], [1,2]$ a $[2,1]$.

(2 body)



Trojúhelník si rozdělím

Tedy $\int_M x^2y + xy^2\,dxdy = \int_0^1\left(\int_{x/2}^{2x} x^2y + xy^2\,dy\right)dx + \int_1^2\left(\int_{\frac{x}{2}}^{-x+3} x^2y + xy^2\,dy\right)dx$

$\frac{27}{6}x^4 = \frac{9}{2}x^4$

- $\int_0^1 \left[x^2\cdot\frac{y^2}{2} + x\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{x/2}^{2x} dx = \int_0^1\left(\left(2x^4 + \frac{8}{3}x^4\right) - \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^4}{24}\right)\right)dx = \int_0^1\left(\frac{16}{3}x^4 - \frac{x^4}{6}\right)dx$

$= \int_0^1 \frac{9}{2}x^4\,dx = \left[\frac{9}{10}\cdot x^5\right]_0^1 = \frac{9}{10}$

- $\int_1^2 \left[x^2\cdot\frac{y^2}{2} + x\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{x}{2}}^{-x+3} dx = \int_1^2\left(\left(x^2\cdot\frac{(-x+3)^2}{2} + x\cdot\frac{(-x+3)^3}{3}\right) - \frac{x^4}{6}\right)dx = \int_1^2\left(-\frac{9}{2}x^2 + 9x\right)dx =$

$-\frac{9}{2}\int_1^2 x^2 - 2x\,dx = -\frac{9}{2}\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 = -\frac{9}{2}\cdot\left(\left(\frac{8}{3} - 4\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right) = -\frac{9}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{9}{2}\cdot -\frac{2}{3} = 3$

$\int_M x^2y + xy^2\,dxdy = \bullet + \bullet = \frac{9}{10} + 3 = \frac{39}{10}$