1. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   (a) Je-li $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každou Riemannovsky integrovatelnou funkci $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ je $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$, potom $f$ je nulová funkce na intervalu $[0,1]$.

   (b) Platí to, pokud navíc přidáme předpoklad, že $f$ spojitá funkce na $[0,1]$?

   (2 body)

Pro 1(a) uvažme jako $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \\ 1 & x \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$

O této funkci víme, že její integrál se bude rovnat nule. Zároveň ale víme, že pro libovolnou funkci $g(x)$ bude součin $f(x)g(x)$ obsahovat $0$, tedy i infimum na každém podintervalu bude $0$. Tudíž $s(D,x)$ bude $= 0$. Zároveň jsme si v úkolu ukázali, že i horní součet se se zjemněním blíží k $0$, tedy se bude i součin $f(x)g(x)$ blížit nule, tedy i horní součet bude $0$. Celkově tedy neplatí, že $f(x)$ musí být na $[0,1]$ nulová, protože jsem ukázal protipříklad, který podmínky splňuje.

1b) Pokud však vyžadujeme spojitost, již neplatí, že v každém dělení je $\inf = 0$, stejně jako neplatí, že integrál $f(x)$ se pro libovolné dělení přiblíží předem libovolně k $0$. Díky spojitosti $f(x)$ tedy každý bod obsahuje i své okolí, tudíž jeho hodnota bude reflektována v hodnotě integrálu. Aby bylo $\int_0^1 f(x)g(x) = 0 \ \forall g(x)$ s jediným $f(x)$, musí být $f(x)$ nulová na celém svém intervalu společně se všemi okolími svého bodu.

Tedy pro 1b) by tvrzení platilo.

2. Spočtěte integrál funkce $f(x, y, z) = y\cos(x+z)$ na množině $M$, která je určená plochami $y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}$. (3 body)

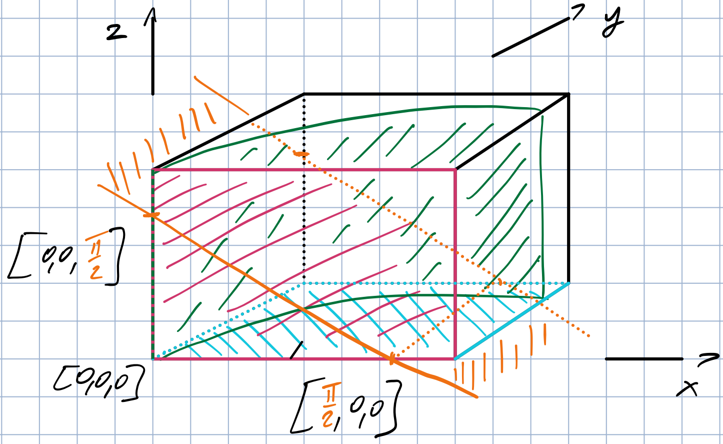
$$\int_M y\cdot\cos(x+z)\,dx\,dy\,dz$$

$y=\sqrt{x}$

$x=\frac{\pi}{2}-z$

$z=\frac{\pi}{2}-x$

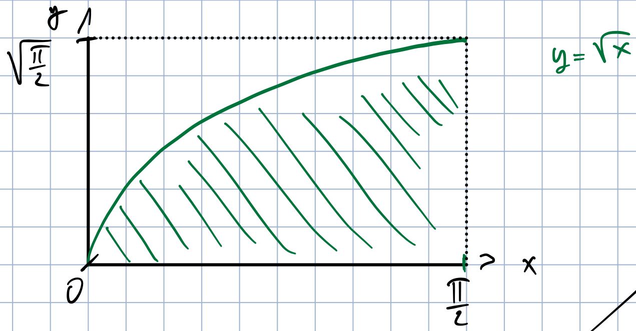
$z=0$

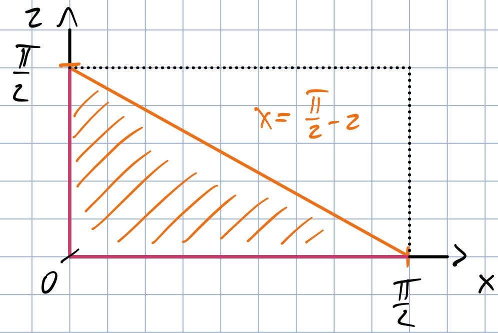


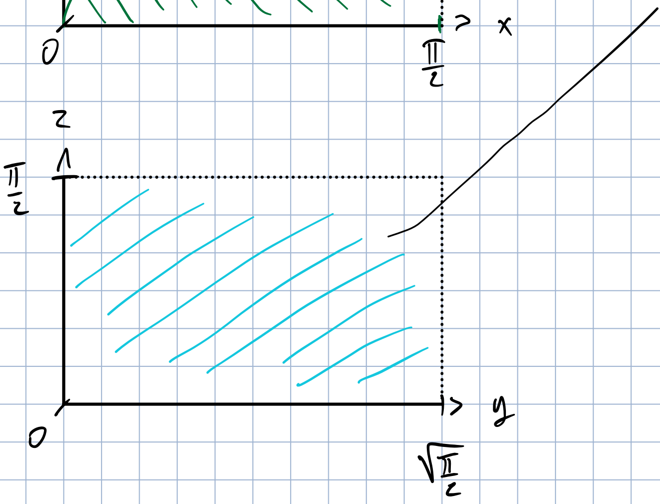

$x\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$

$y\in\langle 0,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\rangle$

$z\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$




$$\int_M y\cdot\cos(x+z)\,dydzdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{-x+\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{x}} y\cdot\cos(x+z)\,dydzdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{-x+\frac{\pi}{2}}\left[\frac{y^2\cdot\cos(x+z)}{2}\right]_0^{\sqrt{x}}dzdx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{-x+\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos(x+z)\,dzdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[x\cdot\sin(x+z)\Big]_0^{-x+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(x - x\cdot\sin(x)\big)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\frac{\pi^2}{8}} - \frac{1}{2}\underbrace{\Big[-x\cos(x)+\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{1}$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$$