Podstata „úlohy". (Věty o implicitních funkcích)

Jsou dány spoj. reálné funkce $F_i(x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n)$, $i = 1 \ldots n$ v $n+m$ proměnných.

Určuje systém rovnic
$$F_1(x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_n(x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_n) = 0$$

v nějakém smyslu funkce $f_i \equiv y_i(x_1 \ldots x_m)$, $i = 1 \ldots n$?

Tedy chceme nějaké proměnné, např.: y a z, chápat jako funkce x na nějakém okolí.

Věta: Buď $F(x,y)$ reálná funkce definovaná v nějakém okolí bodu (x_0, y_0). Nechť má F spojité parciální derivace do řádu $k \geq 1$ a nechť je $F(x_0, y_0) = 0$ a $\left|\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\right| \neq 0$. Potom existují $\delta > 0$, $\Delta > 0$ t.ž. ke každému $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ existuje právě jedno $y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ splňující $F(x,y) = 0$.

Dále, označíme-li toto $y := f(x)$, potom získáme $f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ má spojité derivace do řádu k.

Buď třeba $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} > 0$. $\frac{\partial F}{\partial y}$ jsou spojité, $A(\delta) = \{x \mid |x - x_0| \leq \delta\}$ je omezená a uzavřená, tedy kompaktní a existují $a > 0, K, \delta_1 > 0$ a $\Delta > 0$ t.ž. pro (x,y) v $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times \langle y_0 - \Delta, y_0 + \Delta \rangle$ máme $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \geq a$ a $\left|\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right| \leq K$.

Funkce f: pro pevné $x \in U(\delta_1) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ definujeme funkci φ_x na $y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ předpisem
$$\varphi_x(y) = F(x,y).$$ Potom je $\varphi_x'(y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} > 0$ a tedy všechny $\varphi_x(y)$ rostou v y a $\varphi_{x_0}(y - \Delta) < \varphi_{x_0}(y_0) < \varphi_{x_0}(y_0 + \Delta)$. F je spojitá a tedy pro nějaké δ $0 < \delta \leq \delta_1$: $\forall x\, U(\delta)$, $\varphi_x(y_0 - \Delta) < 0 < \varphi_x(y_0 + \Delta)$.

y_x roste a tedy je prostá, takže existuje právě jedno $y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ t.ž. $y_x(y) = 0$

- to jest $F(x,y) = 0$. Označme toto y jako $f(x)$.

Vlastnosti funkce f: (zatím ani nevíme, jestli je f spojitá)

Podle Lagrangeovy věty:

$$0 = F(t+h, f(t+h)) - F(t, f(t)) =$$
$$= F(t+h, f(t) + (f(t+h) - f(t))) - F(t, f(t)) =$$
$$= \frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial x} \cdot h$$
$$+ \frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial y} \cdot (f(t+h) - f(t))$$

takže

$$f(t+h) - f(t) = -h \cdot \frac{\frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial x}}{\frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial y}}$$ pro nějaké $0 < \theta < 1$

$\hookrightarrow$ (*)

Tedy $|f(t+h) - f(t)| \le |h| \cdot \left|\frac{U}{a}\right|$ a f je spojitá, a dále z (*)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = -\frac{\frac{\partial F(t, f(t))}{\partial x}}{\frac{\partial F(t, f(t))}{\partial y}}$$

Máme tedy:

$$f'(t) = -\frac{\frac{\partial F(t, f(t))}{\partial x}}{\frac{\partial F(t, f(t))}{\partial y}}$$

a tuto formuli lze derivovat tak dlouho, jak to existence derivací na pravé straně dovolí.

Přestože můžeme derivovat, dokud to jde, první derivace $\frac{\partial F}{\partial y}$ je podmínkou.

Doteď byla f jen s jednou proměnnou, teď však dokážeme pro více proměnných:

Věta: Buď $F(\mathbf{x}, y)$ funkce $n+1$ proměnných definovaná v okolí bodu $(\mathbf{x}^0, y_0)$. Nechť má F spojité parciální derivace do řádu $k \geq 1$ a nechť

$$F(\mathbf{x}^0, y_0) = 0 \quad \text{a} \quad \left| \frac{\partial F(\mathbf{x}^0, y_0)}{\partial y} \right| \neq 0$$

Potom existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ t.ž. $\forall \mathbf{x}$ s $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \delta$ existuje přesně jedno y s $|y - y_0| < \Delta$ t.ž. $F(\mathbf{x}, y) = 0$.

Dále, píšeme-li $y = f(\mathbf{x})$, pro toto jednoznačné řešení y, má funkce

$$f: (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \ldots \times (x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$$

spojité parciální derivace do řádu k.

Uvažujme nyní dvě rovnice:

$$F_1(\mathbf{x}, y_1, y_2) = 0$$
$$F_2(\mathbf{x}, y_1, y_2) = 0$$

a pokusme se najít řešení $y_i = f_i(\mathbf{x})$, $i = 1,2$ v nějakém okolí $(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0)$.

Aplikujme větu o jedné rovnici. Mysleme o druhé z rovnic jako o rovnici pro y_2: v nějakém okolí $(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0)$ získáme y_2 jako funkci $\psi(\mathbf{x}, y_1)$. To substituujeme do první rovnice:

$$G(\mathbf{x}, y_1) = F_1(\mathbf{x}, y_1, \psi(\mathbf{x}, y_1))$$ a řešení $y_1 = f_1(\mathbf{x})$ v nějakém okolí bodu $(\mathbf{x}^0, y_1^0)$ může být substituováno do ψ a získáme

$$y_2 = f_2(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}, f_1(\mathbf{x}))$$

Předpokládali jsme však:

- Spojité parciální derivace fcí F_i
- Abychom získali ψ: $\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(\mathbf{x}^0, y_1^0, y_2^0) \neq 0$.

Zároveň jsme potřebovali:

$$\frac{\partial G}{\partial y_1}(\mathbf{x}^0, y_1^0) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \neq 0 \qquad \text{XX}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_1}$$

což transformuje (xx) na:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\right) \neq 0$$

tedy zejména:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\right) \neq 0$$

což je ale:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j} \neq 0$$

Totiž: není-li tento determinant nula je buď:

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x^0, y_1^0, y_2^0) \neq 0$$

a/nebo

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x^0, y_1^0, y_2^0) \neq 0$$

Pokud by platilo druhé, stačí začít řešit $F_2(x, y_1, y_2) = 0$ pro y_1 místo y_2.

Jacobiho determinant

Jacobián:

Pro konečnou posloupnost funkcí $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (F_1(\mathbf{x}, y_1, \dots y_m), \dots, F_m(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_m))$ a pro $\mathbf{y} = (y_1 - y_m)$ se definuje Jacobiho determinant

$$\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{y})} = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1-m}.$$

Prakticky je to rozšíření derivace jedné F podle jednoho $y := \frac{D(F)}{D(y)} = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Funkce f tedy nějak transformuje (a,b) na $(f(a), f(b))$ —> stlačuje nebo natahuje délky „cihliček" okolo x v poměru hodnoty derivace $\frac{df}{dx}$ v x, vektorová funkce $\mathbf{f}[U]$ deformuje objem malých cihliček v U okolo x v poměru Jacobiánu.

(Determinant je objem rovnoběžnostěnu)

Věta: Buďte $F_i(x, y_1 \dots y_m)$, $i = 1 \dots m$ funkce $n+m$ proměnných se spojitými parc. derivacemi do řádu $k \geq 1$. Buď $\mathbf{F}(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{y}^\circ) = 0$

a $$\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{y})}(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{y}^\circ) \neq 0.$$

Potom existují $\delta > 0$, $\Delta > 0$ t.ž. $\forall \mathbf{x} \in (x_1^\circ - \delta, x_1^\circ + \delta) \times \dots \times (x_n^\circ - \delta, x_n^\circ + \delta)$

$\exists! \, \mathbf{y} \in (y_1^\circ - \Delta, y_1^\circ + \Delta) \times \dots \times (y_m^\circ - \Delta, y_m^\circ + \Delta)$

t.ž. $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$

(to jest: $F_1(x, y_1 \dots y_m) = 0$

$\vdots$

$F_m(x, y_1 \dots y_m) = 0$)

Píšeme-li toto $\mathbf{y}$ jako vektorovou funkci $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, mají f_i spojité parc. derivace do řádu k.

Aplikace: Vázané extrémy

Stále platí, že extrémy budou uvnitř intervalu v bodech, kde $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$, $i = 1 \dots n$

avšak již pro dvě proměnné máme nekonečně mnoho krajních bodů (na rozdíl od jedné proměnné).

Příklad: $f(x,y) = x + 2y$ na $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

kruh, kompaktní, tedy f nabývá max. i min. na B.

! Extrémy ale budou v nekonečné množině $M = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, jelikož máme konstantní $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$

Přístup: Najdeme extrémy funkce $f(x_1 \dots x_n)$ jako podřízené vazbám $g_i(x_1 \dots x_n)$ $i = 1 \dots k$.

Věta: Buďte $f, g_1 - g_n$ reálné funkce definované na otevřené množině $D \subseteq E_n$; nechť mají spojité parc. derivace. Nechť je hodnost matice M maximální, tedy k v každém bodě oboru D.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Pak jestliže funkce f nabývá v bodě $\boldsymbol{a} = (a_1 - a_n)$ lokálního extrému podmíněného vazbami $g_i(x_1 - x_n) = 0 \quad i = 1 - k$, existují čísla $\lambda_1 - \lambda_k$ t.ž. $\forall i = 1 - n$:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} = 0$$

Tedy v příkladu máme $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$, $g(x,y) = x^2+y^2-1$, tedy $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$.

Rovnice:

$$1 + \lambda \cdot 2x = 0$$
$$2 + \lambda \cdot 2y = 0$$

mají řešení pro $\underline{\underline{y = 2x}}$

→ tedy jelikož $x^2+y^2 = 1 \to 5x^2 = 1 \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

a extrémy budou na pozici $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ a $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

- Díky otevřenosti D můžeme derivovat jak chceme (limita bude existovat).

Čísla λ_i := Lagrangeovy multiplikátory

jejich síla je v tom, že hledáme k čísel ve více než k rovnicích.

Důkaz věty:

Matice M má hodnost k, právě když alespoň jedna její podmatice $k \times k$ je reg., tedy má nenulový determinant. Dejme tomu:

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Pak podle věty o implicitních funkcích máme v okolí bodu $\mathbf{a}$ funkce $\phi_i(x_{k+1} — x_n)$ se spoj. par. der. t.ž. $(\tilde{\mathbf{x}} = (x_{k+1} — x_n))$

$$g_i(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}) — \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}) = 0 \quad \text{pro } i = 1 — k$$

Tedy lokální min./max. funkce $f(\mathbf{x})$ v $\mathbf{a}$ podmíněné danými vazbami dává lokální max./min. (nepodmíněné) funkce

$$F(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}),$$ tedy v $\tilde{\mathbf{a}}$ a tedy

je $$\frac{\partial F(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = 0$$ pro $i = k+1 — n$, to jest podle řetízkového pravidla:

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} \quad \text{pro } i = k+1 — n .$$

Derivováním konstantní $g_j(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}) = 0$ dostaneme pro $j = 1 — k$:

$$\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \quad \text{pro } i = k+1 — n$$

Nyní díky nenulovému determinantu M a regulárnosti má:

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1 — k$$

jednoznačné řešení $\lambda_1 — \lambda_k$. Toto jsou rovnice z tvrzení. To platí pro $i \leq k$. Dokážeme $i > k$.

Pro $i > k$:

Zeptat se na přednášce!

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(a)}{\partial x_i} =$$

$$= -\sum_{r=1}^{k} \frac{\partial f(a)}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{a})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial g_j(a)}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{a})}{\partial x_i} =$$

$$= -\sum_{r=1}^{k} \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(a)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \phi_r(a)}{\partial x_i}$$

$$= -\sum_{r=1}^{k} 0 \cdot \frac{\partial \cdot \phi_r(\tilde{a})}{\partial x_i} = 0$$

Aplikace: Regulární zobrazení

Regulární zobr.: Buď $U \subseteq \mathbb{E}_n$ otevřená a nechť mají f_i, $i = 1 \ldots n$ spoj. par. der.
Řekneme, že výsledné zobrazení $f = (f_1 \ldots f_n) : U \to \mathbb{E}_n$
je regulární jestliže

$$\frac{D(f)}{D(x)}(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$$

Tvrzení: Je-li $f : U \to \mathbb{E}_n$ regulární, je obraz $f[V]$ každé otevřené podmnožiny $V \subseteq U$ otevřený.

Dk: Vezmeme $f(x^0) = y^0$. Definujeme $F : V \times \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ předpisem

$$F_i(x, y) = f_i(x) - y_i$$

Potom je $F(x^0, y^0) = 0$ a $\frac{D(F)}{D(x)} \neq 0$ a tedy můžeme použít větu o IF
a dostaneme $\delta > 0, \Delta > 0$ t.ž. $\forall y : \|y - y^0\| < \delta \ \exists x$ t.ž. $\|x - x^0\| < \Delta$
a $F_i(x, y) = f_i(x) - y_i = 0$. To znamená, že máme $f(x) = y$
a $\Omega(y^0, \delta) = \{y \mid \|y - y^0\| < \delta\} \subseteq f[V]$.

Tvrzení: Buď $f: U \to \mathbb{E}_n$ regulární zobrazení. Potom $\forall x^\circ \in U\ \exists$ otevřené okolí V t.ž. restrikce $f|V$ je prosté zobrazení. Navíc, zobrazení $g: f[V] \to \mathbb{E}_n$ k $f|V$ inversní je regulární.

Dk: Znovu použijeme zobrazení $F = (F_1, \dots, F_n)$, kde $F_i(x, y) = f_i(x) - y_i$.
Pro dost malé $\delta > 0$ máme právě jedno $x = g(y)$ t.ž. $F(x, y) = 0$ a $\|x - x^\circ\| < \Delta$. Toto g má navíc spojité parc. der.

Máme:

$$D(id) = D(f \circ g) = D(f) \cdot D(g)$$

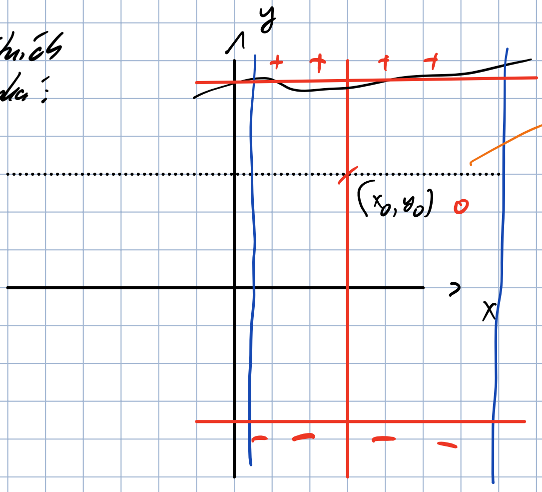
což podle řetízkového pravidla

$$\frac{D(f)}{D(x)} \cdot \frac{D(g)}{D(y)} = \det(D(f)) \cdot \det(D(g)) = 1$$

a tedy $\forall y \in f[V]$, $\frac{D(g)}{D(y)}(y) \neq 0$.

Důsledek: Prosté regulární zobrazení $f: U \to \mathbb{E}_n$ má regulární inversi $g: f[U] \to \mathbb{E}_n$.

Vysvětlení implicitních funkcí:



→ derivace je ale kladná, tudíž to roste $- \ \ +$
víme, že je prostá a protože jde
od − do +, tak jen v jednom
bodě nabyla 0.

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad \varphi'_{x_0}(y_0) > 0$$

$$\varphi_x(y(x)) = 0$$

→ na tom malém intervalu

$$F(x, y) = \varphi_x(y)$$

$$F(x+h, f(x+h)) - F(x, f(x)) = 0$$

A nyní uděláme trik,
který je matoucí svou triviálností!

$$F(x+h, f(x)+k)$$

$k = f(x+h) - f(x)$ → teprve zjistíme, že $k \mapsto 0$

Lagrange:

$$h \cdot \ldots + k \cdot \ldots$$

→ Na kompaktním okolí je všechno omezené shora, zdola,
ukážeme, že i $k \mapsto 0$.