Metrický prostor (X,d), $d: X \times X \to \mathbb{R}$:

$$d(x,y) \geq 0$$
$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$
$$d(x,y) = d(y,x)$$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

$(\mathbb{R}, |x-y|)$, $(\mathbb{C}, |x-y|)$

Euklidovský prostor $\mathbb{E}_n$: $(\mathbb{R}^n, d)$, $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$

V_n vekt. prostor se sk. součinem uv, normou $\|u\| = \sqrt{uu}$, vzdáleností $\|u-v\|$.

Diskrétní prostor: (X,d), kde $d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq y \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Množina všech omezených funkcí na $\langle a,b \rangle$:

$$F(a,b), \text{ kde } d(f,g) = \sup \{ |f(x) - g(x)| \mid a \leq x \leq b \}$$

Podprostor (Y,d') metr. prost. (X,d):

Pokud $Y \subseteq X$ a $d'(x,y) = d(x,y)$.

Spojité zobrazení $f: (X,d) \to (Y,d')$ $\forall x \in X: \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:$

$$d(x,y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Složení $g \circ f: (X,d) \to (Z,d'')$ spojitých $f: (X,d) \to (Y,d')$, $g: (Y,d') \to (Z,d'')$ je spojité.

Konvergence: $\lim_n x_n = x$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 (n \geq n_0 \implies d(x, x_n) < \varepsilon)$

Stejnoměrná spojitost:

Věta: Zobrazení $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ je spojité $\iff \forall (x_n)_n$ konvergentní v (X_1, d_1) posl. $(f(x_n))_n$ konverguje v (X_2, d_2) a platí $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

Důkaz:

I. Buď f spojitá a nechť $\lim_n x_n = x$. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme ze spojitosti $\delta > 0$ tak, aby $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$, pro $d_1(x, y) < \delta$. Podle definice konvergence posloupnosti existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $d_1(x_n, y) < \delta$. Tedy jeli $n \geq n_0$, máme $d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ a potom $\lim_n f(x) = f(\lim_n x_n)$.

II. Nechť f není spojitá. Potom existují $x \in X_1$ a $\varepsilon_0 > 0$ t.ž. $\forall \delta > 0 \; \exists x(\delta)$ t.ž.:

$$d_1(x, x(\delta)) < \delta \quad \text{ale} \quad d_2(f(x), f(x(\delta))) \geq \varepsilon_0.$$

Položme $x_n = x(\frac{1}{n})$. Potom $\lim_n x_n = x$,
ale $f((x_n))_n$ nemůže konvergovat k $f(x)$. $\boxed{\times}$

Okolí: $\Omega(x, \varepsilon) = \{ y \mid d(x, y < \varepsilon \}$

U je okolí bodu $x \equiv \exists \varepsilon > 0, \Omega(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Pozorování: U je okolí x a $U \subseteq V \implies V$ je okolí x.

U a V jsou okolí $x \implies U \cap V$ je okolí x.

Otevřená množina: $U \subseteq (X, d)$ je otevřená, jeli okolím každého svého bodu.

Pozorování: $\forall \, \Omega_X(x, \varepsilon)$ je otevřená v (X, d).

Pozorování: Množiny $\emptyset$ a X jsou otevřené. Jsouli U_i, $i \in J$ otevřené, potom $\bigcup_{i \in J} U_i$ je otevřená, a jsou-li U, V otevřené, je $U \cap V$ otevřená.

Uzavřená množina $A \subseteq (X, d)$ je uzavřená v $(X, d) \equiv \forall (x_n)_n \subseteq A$ konvergentní v X je $\lim_n x_n$ v A.

Tvrzení: $A \subseteq (X,d)$ je uzavřená v $(X,d) \iff X \setminus A$ je otevřená.

Dk: I: Nechť $X \setminus A$ není otevřená. Potom $\exists x \in X \setminus A$ t.ž. $\forall n$ je $\Omega(x, \frac{1}{n}) \notin X \setminus A$.
Zvolme $x_n \in \Omega(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Potom $(x_n)_n \subseteq A$ a $\lim x_n = x \notin A$ a tedy A není uzavřená.

II. Nechť je $X \setminus A$ otevřená a $(x_n)_n \subseteq A$ konverguje k $x \in X \setminus A$.
Potom $\exists \varepsilon > 0 : \Omega(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$ a tedy pro dost velké n,
$x_n \in \Omega(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$, spor. $\boxed{\times}$ (Tedy nelze, aby pak A nebyla uzavřená)

Důsledek: Množiny $\emptyset$ a X jsou uzavřené. Jsou-li $A_i : i \in J$ uzavřené, je i $\bigcap_{i \in J} A_i$ uzavřená.
Jestli jsou A i B uzavřené, je $A \cup B$ uzavřená.

Vzdálenost od množiny $d(x,A) = \inf \{d(x,a) \mid a \in A\}$.

Uzávěr množiny A: $\overline{A} = \{x \mid d(x,A) = 0\}$

Tvrzení:

$\overline{\emptyset} = \emptyset$

$A \subseteq \overline{A}$

$A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Dk: Je-li $x \in \overline{A \cup B}$ a $x \notin \overline{A}$, pak $\alpha = d(x,A) > 0$.
Tedy $y \in A \cup B$ s $d(x,y) < \alpha$ jsou v B, tedy $x \in \overline{B}$.

Tvrzení: $\overline{A}$ je množina všech limit konvergentních posloupností $(x_n)_n \subseteq A$.

Tvrzení: $\overline{A}$ je uzavřená a je to nejmenší uzavřená množina obsahující A. Tedy

$$\overline{A} = \bigcap \{B \mid A \subseteq B, B \text{ uzavřená}\}$$

Dk: Pokud $(x_n)_n \subseteq \overline{A}$ konverguje k x, zvolme $y_n \in A$ s $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Pak $\lim_n y_n = x$ a $x \in \overline{A}$.
Nyní nechť B uzavřená a $A \subseteq B$. Je-li $x \in \overline{A}$, můžeme zvolit konvergentní posl. $(x_n)_n$ v A, a tedy v B, takovou, že $\lim x_n = x$. Máme tedy $x \in B$.

Věta: Buďte (X_1, d_1), (X_2, d_2) metrické prostory a $f: X_1 \to X_2$. Potom jsou následující ekv.:

1) f je spojité
2) $\forall x \in X_1$ a $\forall V$ okolí bodu $f(x)$ $\exists U$ okolí bodu x t.ž. $f[U] \subseteq V$.
3) $\forall$ otevřenou U v X_2 je vzor $f^{-1}[U]$ otevřený v X_1.
4) $\forall$ uzavřenou A v X_2 je vzor $f^{-1}[A]$ uzavřený v X_1.
5) $\forall A \subseteq X_1$ je $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$

Topologická vlastnost: Vlastnost nebo definice je topologická, jakmile zachovává homeomorfismy.

Máme tedy následující topologické vlastnosti:

- konvergence
- otevřenost
- uzavřenost
- uzávěr
- okolí
- spojitost sama

Homeomorfismus: Spojité $f: (X,d) \to (Y,d')$ se nazývá homeomorfismus, existuje-li spojité $g: (Y,d') \to (X,d)$ t.ž. $f \circ g = id_Y$ a $g \circ f = id_X$.
Existuje-li homeomorfismus, jsou (X,d), (Y,d') prostory homeomorfní.

Isometrie: Zobrazení $f: (X,d) \to (Y,d')$ se nazývá izometrie, je-li $d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$ $\forall x,y \in X$. Potom je f triviálně vzájemně jednoznačné a spojité, jeho inverze je taky isometrie, tudíž je to homeomorfismus.
Takové prostory nazýváme izometrické. Je to silnější než homeomorfismus, jelikož zachovává všechny vlastnosti spojené se vzdáleností.

Ekvivalentní metriky: metriky d_1, d_2 jsou ekvivalentní, je-li $id_X: (X, d_1) \to (X, d_2)$ homeomorfismus.

Silná ekvivalence: metriky d_1, d_2 jsou silně ekvivalentní, existují-li kladné konstanty α, β t.ž.

$\forall x,y \in X$:
$$\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta_1 \cdot d_1(x,y).$$

- takové metriky zachovávají i stejnoměrnou spojitost.

Alternativní metriky v E_n: (silně ekv.)

$$\lambda((x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$\sigma((x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n)) = \max_i |x_i - y_i|$$

Tvrzení: λ, σ jsou silně ekv. metriky.

Dk: Fakt, že to jsou metriky, lze vidět jednoduše. Ověření podmínek platí.

Dále máme

n·max bude určitě $\leq$: $\forall i$ $|x_i - y_i| \leq \sigma((x_i)_i, (y_i)_i)$

$$\lambda((x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n)) \leq n \cdot \sigma((x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n))$$

Stejně tak $d((x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n)) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{n}\, \sigma((x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n))$.

Na druhé straně:

$$\sigma((x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n)) \leq \lambda((x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n))$$

a

$$\sigma((x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n)) \leq d((x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n))$$

Součin Pro (X_i, d_i), $i = 1 \dots n$ definujeme na kartézském součinu $\prod_{i=1}^{n} X_i$ metriku

$$d((x_1 \dots x_n),(y_1 \dots y_n)) = \max_i d_i(x_i, y_i).$$

Získaný $\prod_{i=1}^{n} (X_i, d_i)$ se nazývá součin prostorů (X_i, d_i).

$$(E_n, \sigma) = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}} = \mathbb{R}^n$$

Věta: Projekce $p_j = ((x_i)_i \to x_j) : \prod_{i=1}^{n} (X_i, d_i) \to (X_j, d_j)$ jsou spojitá zobrazení.

Věta: Buďte $f_j : (Y, d') \to (X_j, d_j)$ libovolná spojitá zobr. Potom jednoznačně určené $f : (Y, d') \to \prod_{i=1}^{n} (X_i, d_i)$ splňující $p_j \circ f = f_j$, totiž zobr. $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$, je spojité.

Vzory a obrazy: $f[A] \subseteq B \equiv A \subseteq f^{-1}[B]$

$$f[f^{-1}[A]] \subseteq B, \quad f^{-1}[f[A]] \supseteq A$$

Cauchyovská posl. Posl. $(x_n)_n$ v (X,d) je Cauchyovská, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \text{ t.ž. } m,n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Pozorování: Každá konvergentní je Cauchyovská.

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\varepsilon$$

Tvrzení: Nechť má Cauchyovská posl. konvergentní podposl. Potom konvergují. (k lim. podposl)

Dk: Nechť je $(x_n)_n$ Cauchyovská a nechť $\lim_n x_{k_n} = x$. Buď $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pro $m,n \geq n_1$ a $d(x_{k_n}, n) \leq \varepsilon$ pro $n \geq n_2$. Položíme-li $n_0 = \max(n_1, n_2)$, máme pro $n \geq n_0$ (protože $k_n \geq n$)

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) \leq 2\varepsilon.$$

Pozn: Silná ekv. metrik zachovává Cauchyovskost a úplnost. Pouhá ekv. nikoliv.

Úplný metrický prostor (X,d) je úplný, jestliže v něm $\forall$ Cauchyovská posloupnost (X,d) konvergují.

Věta: Součin úplných prostorů je úplný. Speciálně, $\mathbb{E}_n$ je úplný.

Důsledek: Podprostor úplného prostoru je úplný $\Leftrightarrow$ je uzavřený

Kompaktní prostory:

Kompaktní metrický prostor (X,d) je kompaktní, obsahuje-li v něm každá posl. konverg. podposl.

Tvrzení: Podprostor kompaktního prostoru je kompaktní $\iff$ je uzavřený.

Dk: I: Buď Y uzavřený podprostor kompaktního X, buď $(y_n)_n$ posloupnost v Y. Jako posloupnost v X má podposl. s limitou a díky uzavřenosti je taková limita v Y.

II: Nechť není Y uzavřená. Potom existuje posloupnost $(y_n)_n$ v Y konvergentní v X t.ž. $y = \lim_n y_n \notin Y$. Potom $(y_n)_n$ nemůže mít podposl. konverg. v Y, protože každá její podposl. konverguje k $y \notin Y$.

Tvrzení: Každý kompaktní prostor je omezený.

Tvrzení: Každý kompaktní prostor je úplný. → jiné tam být ani nemohou.

Dk: Cauchyovská posl. má konverg. podposl., tedy sama konverguje. $\boxed{\times}$

Tvrzení: Buď (X,d) libovolný a nechť je podprostor Y prostoru X kompaktní. Potom je Y uzavřený v (X,d).

Dk: Nechť $(y_n)_n$ posloupnost v Y konverguje v X k limitě y. Potom každá podposl. $(y_n)_n$ konverguje k y a tedy je $y \in Y$.

Omezenost metrického prostoru: (X,d) je omezený, jestliže pro nějaké K platí:

$$\forall x,y \in X, \quad d(x,y) < K$$

Tvrzení: Každý kompaktní prostor je omezený.

Dk: Zvolme x_1 libovolně a x_n tak, aby $d(x_1,x_n) > n$. Posl. $(x_n)_n$ nemá konverg. podposl.: kdyby x byla limita takové podposl., bylo by pro dost velké n nekonečně mnoho členů této podposl. blíž k x_1 než $d(x_1,x_n)+1$. $\boxed{\lightning}$

Věta: Součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.

Dk: (důkaz pouze pro součin dvou):

Nechť (X,d_1), (Y,d_2) jsou kompaktní a buď $((x_n,y_n))_n$ posloupnost v $X \times Y$.
Zvolme konvergentní podposl. $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$ a konvergentní podposl. $(y_{k_n})_n$ posl. $(y_n)_n$. Potom je $((x_{k_n}, y_{k_n}))_n$ konvergentní podposl. posl. $((x_n,y_n))_n$.
podle lemma:

Lemma: Posl. $(x_1^1,\dots,x_n^1),(x_1^2,\dots x_n^2),\dots,(x_1^k,\dots x_n^k)$ konverguje k $(x_1,\dots,x_n)$ v $\prod(X_i,d_i)$ právě tehdy když každá posloupnost $(x_i^k)_k$ konverguje k x_i v (X_i,d_i).

Věta: Podprostor euklidovského prostoru E_n je kompaktní $\iff$ je omezený a uzavřený.

Dk: Součin úplných prostorů je úplný. Tedy speciálně $\mathbb{E}_n$ je úplný.
Podprostor úplného prostoru je úplný, právě když je uzavřený.

I. Jakmile je podprostor $\mathbb{E}_n$ kompaktní, musí být i uzavřený a omezený.

II. Buď nyní $Y \subseteq \mathbb{E}_n$ omezený a uzavřený. Jelikož je omezený, je pro dostatečně velký komp. int.
$Y \subseteq J \subseteq \mathbb{E}_n$. J^n je kompaktní jako součin intervalů $\langle a_i;b_i\rangle$,
a jelikož je Y uzavřený v $\mathbb{E}_n$, je též uzavřený v J^n a tedy je kompaktní.

Tvrzení: Buď $f:(X,d)\to(Y,d')$ spojité zobrazení a buď $A\subseteq X$ kompaktní. Potom je i $f[A]$ kompaktní.

Dk: Buď $(y_n)_n$ posloupnost v $f[A]$. Zvolme $x_n \in A$ tak, aby $y_n = f(x_n)$.
Buď $(x_{k_n})_n$ konverg. podposl. posl. $(x_n)_n$. Potom je $(y_{k_n})_n = (f(x_{k_n}))_n$ konvergentní podposl. $(x_n)_n$

Tvrzení: Buď (X,d) kompaktní. Potom každá spojitá $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ nabývá maxima i minima.

Dk: Buď $Y = f[X] \subseteq \mathbb{R}$ kompaktní. Je to tedy omezená množina, co má supremum M a infimum m.
Zřejmě máme $d(m,Y) = d(M,Y) = 0$ a jelikož je Y uzavřená, $m,M\in Y$.

Věta: Je-li (X,d) kompaktní a je-li $f:(X,d)\to(Y,d')$ vzájemně jednoznačné spojité zobrazení, je to homeomorfismus.

Alternativně / obecněji: Nechť $f:(X,d)\to(Y,d')$ je spojité zobrazení na, nechť $g:(X,d)\to(Z,d'')$ spojité a nechť $h:(Y,d')\to(Z,d'')$ je takové, že $h\circ f = g$. Potom h je spojité.

Dk alternativy: Buď B uzavřená v Z. Potom je $A = g^{-1}[B]$ uzavřená a tedy kompaktní v X a tedy je $f[A]$ kompaktní, a proto uzavřená v Y. Jelikož je f zobrazení na, máme $f[f^{-1}[C]] = C$ $\forall C$. Proto je:

$$h^{-1}[B] = f[f^{-1}[h^{-1}[B]]] = f[(h \circ f)^{-1}[B]] = f[g^{-1}[B]] = f[A] \text{ uzavřená.}$$

$\boxtimes$

Dk původního: nyní stačí dosadit $g = id_Y$.