Parciální derivace: Parciální derivace funkce f podle x_k v bodě $(x_1, \dots, x_n)$ je:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\dots x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1} \dots) - f(x_1 \dots)}{h}, \quad \text{označíme } \frac{\partial f(x_1 \dots x_n)}{\partial x_k}$$

Pokud existuje pro všechna $(x_1 \dots x_n)$ v nějaké oblasti D,

máme $\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \to \mathbb{R}$.

Pozor: Existence parciální derivace neimplikuje spojitost!

Připomenutí ekvivalentního s parc. derivací: pro $\mathbf{x} \in E_n$ definujeme $\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$

$$f(x+h) - f(x) = A \cdot h + |h| \cdot \mu(h) \quad \text{pro nějaké konvergující } \mu \text{ k } 0 \text{ při } h \to 0.$$

tečna ke grafu funkce v bodě $(x, f(x))$ $|h| \cdot \mu(h)$ je „chyba"

Nyní mějme $f(x,y)$ a uvažme plochu $S = \{(t, u, f(t,u)) \mid (t,u) \in D\}$

Dvě parciální derivace vyjadřují směry dvou tečných přímek k S v bodě $(x, y, f(x,y))$,

ale ne tečnou rovinu. Parc. derivace nedává lin. aprox. celé funkce.

Totální diferenciál: Funkce f má totální diferenciál v bodě $\mathbf{x}$, existuje-li spojitá μ v okolí U bodu $\mathbf{o}$

t.ž. $\mu(\mathbf{o}) = 0$ a čísla $A_1 \dots A_n$ pro která:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} A_k h_k + \|\mathbf{h}\| \cdot \mu(\mathbf{h}).$$

Tvrzení: Nechť má f totální diferenciál v bodě $\mathbf{a}$. Potom platí, že:

1) f je spojitá v $\mathbf{a}$

2) f má všechny parc. derivace v $\mathbf{a}$, a to s hodnotami $\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} = A_k$

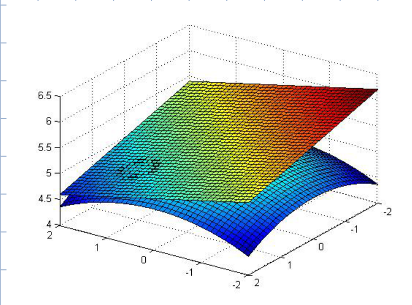
Dk:

I Máme $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq |A(\mathbf{x} - \mathbf{y})| + \mu(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ a lim. na pravé straně pro $\mathbf{y} \to \mathbf{x}$ je zřejmě 0.

II Máme $\frac{1}{h}\left(f(\dots x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1} \dots) - f(x_1 \dots)\right) = A_k + \mu((\dots 0, h, 0, \dots)) \cdot \frac{\|(0, \dots, h, \dots, 0)\|}{h}$,

a limita na pravé straně je zřejmě A_k.

Geometrická interpretace:



Mějme (nad)plochu $S = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid (x_1 - x_n) \in D \subseteq E_{n+1}\}$, parciální derivace popisují jen tečné přímky ve směrech souřadnicových os, zatímco totální diferenciál reprezentuje celou tečnou nadrovinu.

Věta: Nechť má f spoj. parciální derivace v okolí bodu $\mathbf{a}$. Potom má v bodě $\mathbf{a}$ totální diferenciál.

Dk:

$$\mathbf{h}^0 = \mathbf{h},\ \mathbf{h}^1 = (0, h_2, \dots h_n),\ \mathbf{h}^2 = (0, 0, h_3, \dots h_n) \dots \mathbf{h}^n = \mathbf{0}.$$

Potom máme:

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^k) \right) = M.$$

Podle Lagrangeovy věty (Věta o střední hodnotě: Nechť f spoj. na komp. int.. Pak $\exists c \in (a,b): f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$) existují $0 \le \theta_k \le 1$ t.ž.

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a}+\mathbf{h}^k) = \frac{\partial f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \theta_k \cdot h_k, a_{k+1} + h_{k+1}, \dots, a_n + h_n)}{\partial x_k} h_k$$

$$M = \sum \frac{\partial f(a_1, \dots a_k + \theta_k h_k, \dots)}{\partial x_k} h_k$$

$$= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \theta_k h_k, \dots)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) h_k$$

$$= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \|\mathbf{h}\| \cdot \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \theta_k h_k, \dots)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Položme

$$\mu(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\| \cdot \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \theta_k h_k, \dots)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Jelikož $\left| \dfrac{h_k}{\|\mathbf{h}\|} \right| \le 1$ a jelikož jsou $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ spojité, $\lim\limits_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \mu(\mathbf{h}) = 0$. $\boxed{\times}$

Tedy: spojité PD $\Rightarrow$ TD $\Rightarrow$ PD

Aritmetická pravidla:

- Stejná jako u jednoproměnných derivací

Věta: (Skládání):

Nechť má $f(\mathbf{x})$ totální diferenciál v $\mathbf{a}$. Nechť mají $g_k(t)$ derivaci v bodě b a nechť je $g_k(b) = a_k$ pro $k = 1, \dots, n$.

Položme $F(t) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$. Potom má F derivaci v b, totiž

$$F'(b) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot g_k'(b).$$

- Geometricky: Tečná nadrovina vyjádřená diferenciálem funkce f nemá důvod preferovat hlavní osy v nichž se dějí derivace vnitřních funkcí. Proto by tady jen parciální derivace nestačily.

Důsledek: (Řetízkové pravidlo):

Nechť má $f(\mathbf{x})$ tot. dif. v bodě $\mathbf{a}$. Nechť mají funkce $g_k(t_1, \dots, t_r)$ parciální derivace v $\mathbf{b} = (b_1 \dots b_r)$ a nechť je $g_k(\mathbf{b}) = a_k$ pro $k = 1 \dots n$. Potom má funkce

$$(f \circ \mathbf{g})(t_1 \dots t_r) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$$

všechny parc. derivace v b, a platí:

$$\frac{\partial (f \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

pro $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$:

maticový součin

$$\frac{\partial (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})}{\partial t_j} = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}$$

Důsledek: Pravidla pro dělení a násobení:

Násobení: $(u(t) \cdot v(t))' = f(u(t), v(t))' = \frac{\partial f(u(t), v(t))}{\partial x} v'(t) + \frac{\partial f(u(t), v(t))}{\partial y} \cdot u'(t) = v(t) \cdot u'(t) + v'(t) \cdot u(t).$

Dělení: $\dots \quad \frac{v(t) \cdot u'(t) - v'(t) \cdot u(t)}{v^2(t)}$

definujeme: $D\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_{i,k}$

Maticově pro $\mathbf{f}, \mathbf{g}$: $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(t) = D(\mathbf{f}(\mathbf{g})(t)) \cdot D\mathbf{g}(t)$

Věta: (Lagrangeova formule ve více proměnných)

Nechť má f spojité parciální derivace v konvexní otevřené množině $U \subseteq \mathbb{E}_n$.

Potom pro libovolné dva body $x, y \in D$ existuje $\theta : 0 \leq \theta \leq 1$ t.ž.

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{\partial x_j} (y_j - x_j).$$

Dk:

Položme $F(t) = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$. Potom $F = f \circ \mathbf{g}$, kde $\mathbf{g}$ je

definováno jako $g_j(t) = x_j + t(y_j - x_j)$ a $F'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j} \cdot g_j'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j} \cdot (y_j - x_j)$.

Podle Lagrangeovy věty:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = F(1) - F(0) = F'(\theta) \quad \boxed{\times}$$

Pozn.: Často se používá ve tvaru:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h})}{\partial x_j} \cdot h_j$$

Skládání funkcí:

$$\mathbb{E}_k \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{E}_m$$

$$\frac{\partial (f_i \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}$$

Zavedeme-li $D\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right)_{ik}$, je $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = D\mathbf{f} \cdot D\mathbf{g}$.

$D\mathbf{h}$ je pak matice lineární aproximace funkce $\mathbf{h}$.

Derivace vyšších řádů:

- řád je dán tím, kolikrát derivujeme, nikoliv kolikrát se pohybujeme v jednotlivých proměnných.

Tvrzení: Buď $f(x,y)$ funkce taková, že parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ jsou definovány a jsou spojité v nějakém okolí bodu (x,y).

Potom máme $$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Dk: Spočítáme $$\lim_{h \to 0} \overbrace{\frac{f(x+h, y+h) - f(x, y+h) - f(x+h, y) + f(x,y)}{h^2}}^{F(h)}.$$

Položme $\varphi_h(y) = f(x+h, y) - f(x,y)$

$\psi_h(x) = f(x, y+h) - f(x,y)$, dostaneme pro $F(h)$ dva výrazy:

$$F(h) = \frac{1}{h^2}\left(\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y)\right), \quad F(h) = \frac{1}{h^2}\left(\psi_h(x+h) - \psi_h(x)\right)$$

První:
$$\varphi_h'(y) = \frac{\partial f(x+h, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \text{ tedy podle Lagrange}$$

$$F(h) = \frac{1}{h^2}\left(\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y)\right) = \frac{1}{h}\varphi_h'(y + \theta_1 h) = \frac{\partial f(x+h, y+\theta_1 h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y+\theta_1 h)}{\partial y}$$

a tedy znovu podle Lagrange:

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h)}{\partial y}\right) \text{ pro nějaká } 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1.$$

Druhá dk. podobně:

$$F(h) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x+\theta_4 h, y+\theta_3 h)}{\partial x}\right)$$

Obě $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ i $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ jsou spojité na (x,y) okolí a $\lim_{h \to 0} F(h)$ lze spočítat z obou výrazů.

Důsledek: Nechť má funkce f v n proměnných spojité parciální derivace do řádu k. Potom hodnoty těchto derivací závisí jen na tom, kolikrát bylo derivováno v každé z individuálních proměnných.