Objemy (a obsahy)

$A \subseteq \mathbb{E}_n$ (speciální $\mathbb{E}_2$)

Vlastnosti:

$A \subseteq B \Rightarrow vol(A) \leq vol(B)$

A, B disjunktní $\Rightarrow vol(A \cup B) = vol(A) + vol(B)$

volume je zachován isometrií

V $\mathbb{E}_2$:

$$vol(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$$

V $\mathbb{E}_n$:

$$vol(\langle a_1, b_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n \rangle) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

Obecně: $\longrightarrow$ Skoro disjunktní sjednocení:

$$Vol(A \cup B) = vol(A) + vol(B) + vol(A \cap B)$$

předpokládáme, že stěny mají nulový obsah

Stejnoměrná spojitost:

$f: (X, d) \to (Y, d')$ je stejnoměrně spojitá, je-li

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta \text{ t.ž. } \forall x \forall y \; d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$\forall x$ —||— $\forall y$ $\longrightarrow$ takto se kvantifikovalo u obyčejné spojitosti

Př: $f: x \to x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ není stejnoměrně spojitá.

$\leftarrow$ Máme $|f(x) - f(y)| = |x+y| \cdot |x-y|$, tedy abychom dostali $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ v blízkosti $x = 100$, potřebujeme δ 100x menší v blízkosti $x = 1$.

Věta: Je-li (X,d) kompaktní, je každé spojité $f:(X,d) \to (Y,d')$ stejnoměrně spojité.

Zejména to platí pro spojité reálné funkce na kompaktních intervalech.

Dk:

Nechť $f:(X,d) \to (Y,d')$ není stejnoměrně spojitá. Potom existuje $\varepsilon > 0$ t.ž. $\forall n \; \exists x_n, y_n : \; d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ ale $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.

Zvolme konvergentní podposl. $(x_{k_n})_n$ posl. (x_n). Nechť $a = \lim_n x_{k_n}$.

Potom díky ___ je i $a = \lim_n y_{k_n}$. Podle ___ ale nemůže být $f(a) = \lim_n f(x_{k_n})$ a zároveň $f(a) = \lim_n f(y_{k_n})$, tedy f není ani obyč. spojitá.

Riemannův integrál v jedné proměnné

Opakování:

Rozdělení intervalu $\langle a,b \rangle$: posloupnost $P: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$

Zjemnění $P': a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{m-1} < t'_m = b$,

kde $\{t_j \mid j = 1 \dots n-1\} \subseteq \{t'_j \mid j = 1 \dots m-1\}$

Jemnost rozdělení P: $\mu(P) = \max_j (t_j - t_{j-1})$

Pro omezenou $f: J = \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ a P jeho rozdělení definujeme dolní a horní součty:

$$s(f,P) = \sum_{j=1}^{n} m_j (t_j - t_{j-1}), \quad S(f,P) = \sum_{j=1}^{n} M_j (t_j - t_{j-1}), \text{ kde}$$

$$m_j = \inf\{f(x) \mid t_{j-1} \leq x \leq t_j\}, \quad M_j = \sup\{f(x) \mid t_{j-1} \leq x \leq t_j\}$$

Jednoduché pozorování:

Pokud P' zjemňuje P, máme:
$$s(f,P) \leq s(f,P')$$
$$S(f,P) \geq S(f,P')$$

Pro $\forall P_1, P_2$: $\quad s(f,P_1) \leq S(f,P_2)$

Integrál:
$$\underbrace{\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,P)\}}_{\text{dolní Riem. int.}}, \quad \underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(f,P)\}}_{\text{horní Riem. int.}} \quad \forall P \text{ rozdělení}$$

Riemannův integrál: Je-li $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, označujeme společnou hodnotu $\int_a^b f(x)\,dx$ a říkáme jí Riemannův integrál funkce f přes $\langle a,b\rangle$.

Tvrzení: $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists P$ rozdělení t.ž. $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$

Dk:

I: Nechť $\int_a^b f(x)dx$ existuje, nechť $\varepsilon > 0$. Potom existují rozdělení P_1 a P_2 t.ž.

$$S(f,P_1) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad s(f,P_2) > \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

Potom pro společné zjemnění P dvou dělení P_1, P_2:

$$S(f,P) - s(f,P) < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\underline{\varepsilon}}$$

II. Nechť druhé tvrzení platí: Zvolme $\varepsilon > 0$ t.ž. $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Potom je $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f,P) < s(f,P) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$.

Jelikož $\varepsilon > 0$ je libovolně malé, vidíme, že $\overline{\int} = \underline{\int}$, tedy Riem. int. existuje.

Věta: $\forall f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitou Riemannův integrál $\int_a^b f$ existuje.

Dk: Pro $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$ tak, aby $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ Lagrange

Je-li $\mu(P) < \delta$, máme $t_j - t_{j-1} < \delta\ \forall j$, tedy

$$M_j - m_j = \sup\{f(x) \mid t_{j-1} \le x \le t_j\} - \inf\{f(x) \mid t_{j-1} \le x \le t_j\}$$

$$\le \sup\{|f(x) - f(y)| \mid t_{j-1} \le x,y \le t_j\} \le \frac{\varepsilon}{b-a}$$

takže

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum (M_j - m_j)\cdot(t_j - t_{j-1}) \le \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot \sum (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon$$

Věta (Integrální o střední hodnotě):

Buď $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom existuje $c \in \langle a,b\rangle$ t.ž.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

Dk:

Položme $m = \min\{f(x) \mid a \le x \le b\}$, $M = \max\{f(x) \mid a \le x \le b\}$.

Zřejmě

$$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\cdot(b-a)$$

Existuje tedy $K \in \langle m,M\rangle$: $\int_a^b f(x)dx = K\cdot(b-a)$.

Jelikož je f spojitá, existuje $c \in \langle a,b\rangle$: $K = f(c)$.

Pozorování:

Pro $a < b < c$:
$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

Věta: (Základní věta analýzy): Buď $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá. Pro $x \in \langle a,b\rangle$ definujeme:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$ Potom je $F'(x) = f(x)$.

Dk:

Pro $h \neq 0$:
$$\frac{1}{h}\Big(F(x+h) - F(x)\Big) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f =$$

$$= \frac{1}{h} f(x+\theta h)\cdot h = f(x+\theta h)$$ kde $0 < \theta < 1$ a

jelikož je f spojitá, je $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(F(x+h) - F(x)\Big) = \lim_{h \to 0} f(x+\theta h) = f(x)$

Důsledek: Buď $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom má primitivní funkci na (a,b) spojitou na $\langle a,b\rangle$.

Je-li F primitivní funkce f na (a,b) spojitá na $\langle a,b\rangle$, potom je

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Integrální věta o střední hodnotě

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f = f(c)\cdot(b-a) = F'(c)\cdot(b-a)$$

Riemannův integrál ve více proměnných:

V E_n: Kompaktní interval je $J = \langle a_1, b_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_n, b_n \rangle$ -> cihlička

Rozdělení intervalu J je posloupnost $P = (P^1 \_ P^n)$ rozdělení, kde

$$P^j = a_j = t_{j,0} < t_{j,1} < \ldots < t_{j,n_j - 1} < t_{j,n_j} = b_j$$

Cihly rozdělení P říkáme intervalům $\langle t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1} \rangle \times \ldots \times \langle t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1} \rangle$

Množina všech cihel rozdělení P je $\beta(P)$.

Pozorování: Jelikož je J skoro disjunktní interval, kde stěny mají nulový obsah,
tak platí:

$$vol(J) = \Sigma \{ vol(B) \mid B \in \beta(J) \}$$

Diametr intervalu $J = \langle r_1, s_1 \rangle \times \ldots \times \langle r_n, s_n \rangle$ je $diam(J) = \max_i (s_i - r_i)$

Jemnost rozdělení P je $\mu(P) = \max \{ diam(B) \mid B \in \beta(P) \}$

Zjemnění: rozdělení $Q = (Q^1, \ldots, Q^n)$ zjemňuje rozdělení $P = (P^1 \_ P^n)$
jestliže $\forall Q^j$ zjemňuje P^j.

Pozorování: Zjemnění Q rozdělení P vytváří rozdělení Q_B cihel $B \in \beta(P)$
a máme skoro disjunktní sjednocení $\beta(Q) = \bigcup \{ \beta(Q_B) \mid B \in \beta(P) \}$

Pozorování: Každá dvě rozdělení P, Q n-rozměrného kompaktního intervalu J
mají společné zjemnění.

Mějme omezenou $f: J \to \mathbb{R}$ na n-rozměrném komp. intervalu J
a $B \subseteq J$ je n-rozměrný komp. podinterval intervalu J.
Položme:

$$m(f, B) = \inf \{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B \}, \quad M(f, B) = \sup \{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B \}$$

Pozorování: $m(f,B) \leq M(f,B)$ a jeli $C \subseteq B$:

$$m(f, C) \geq m(f, B) \quad , \quad M(f, C) \leq M(f, B)$$

Pro rozdělení P intervalu J a omezenou funkci $f: J \to \mathbb{R}$ definujeme:

$$s_J(f,P) = \sum \{ m(f,B) \cdot vol(B) \mid B \in \beta(P) \}$$

$$S_J(f,P) = \sum \{ M(f,B) \cdot vol(B) \mid B \in \beta(P) \}$$

Obecné pozorování:

$f: X \to \mathbb{R}$ je omezená,

$X = \bigcup X_i$, $X_i = \bigcup X_{ij}$ jsou konečná sloandisjunktní sjednocení.

$M_i = \sup\{ f(x) \mid x \in X_i \}$, $M_{ij} = \sup\{ f(x) \mid x \in X_{ij} \}$

Tedy je:

$$\sum_i M_i \cdot vol(X_i) = \sum_i M_i \sum_j vol(X_{ij}) =$$

$$= \sum_{i,j} M_i \cdot vol(X_{ij}) \geq \sum_{i,j} M_{ij} \cdot vol(X_{ij}).$$

Podobně pro infima.

Tvrzení: Nechť Q zjemňuje P. Potom:

$$s(f,Q) \geq s(f,P), \quad S(f,Q) \leq S(f,P).$$

Tvrzení: $\forall P, Q$ rozdělení intervalu J máme $s(f,P) \leq S(f,Q)$.

Dk: Jelikož $s(f,P) \leq S(f,P)$ a použitím společného R zjemnění P,Q:

$$s(f,P) \leq s(f,R) \leq S(f,R) \leq S(f,Q)$$

Tedy množina $\{ s(f,P) \mid P \text{ rozdělení} \}$ je shora omezená.

Dolní Riemannův integrál:
$$\underline{\int_J} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sup\{ s(f,P) \mid P \text{ rozdělení} \}$$

Horní –||–
$$\overline{\int_J} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \inf\{ S(f,P) \mid P \text{ rozdělení} \}$$

Riemannův integrál: Je-li $\underline{\int_J} = \overline{\int_J}$, pak existuje $\int_J f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, resp.

$$\int_J f(x_1 \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$\inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in J\} \cdot vol(J) \leq \underline{\int_J} f < \overline{\int_J} \leq \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in J\} \cdot vol(J)$$

Tvrzení: Riemannův integrál $\int_J f(\mathbf{x})dx$ existuje $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists P$ rozdělení:

$$S_J(f,P) - s_J(f,P) < \varepsilon.$$

Dk: $S_J(f,P) < \varepsilon + s_J(f,P) \xrightarrow{\text{tedy}} \overline{\int} \leq S_J(f,P) < \varepsilon + s_J(f,P) \leq \varepsilon + \underline{\int} \leq \varepsilon + \overline{\int}$

a ε může být libovolně velké.

Věta: Každá spojitá $f: J \to \mathbb{R}$ na n-rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál $\int_J f$.

Dk: V E_n budeme užívat vzdálenost σ def. $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|$.

Jelikož je f stejnoměrně spojitá, můžeme pro $\varepsilon > 0$ zvolit $\delta > 0$ t.ž.

$$\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y}) < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \frac{\varepsilon}{vol(J)}$$

$\forall B \in \beta(J)$:

$$M(f,B) - m(f,B) = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\} - \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\}$$

$$\leq \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \mid \mathbf{x},\mathbf{y} \in B\} \leq \frac{\varepsilon}{vol(J)}$$

takže:

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum\{(M(f,B) - m(f,B)) \cdot vol(B) \mid B \in \beta(P)\} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{vol(J)} \sum\{vol(B) \mid B \in \beta(P)\} = \frac{\varepsilon}{vol(J)} \cdot vol(J) = \varepsilon$$

NEMÁME však protějšek základní věty Analýzy, zejména její důsledek:

$\forall$ prim. F funkce f můžeme Riemannův integrál počítat jako $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$.

K tomu nám pomůže Fubini:

Věta: (Fubini): Vezmeme součin $J = J' \times J'' \subseteq \mathbb{E}_{m+n}$ intervalů $J' \subseteq \mathbb{E}_m$, $J'' \subseteq \mathbb{E}_n$.

Nechť $\int_J f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{xy}$ existuje a nechť $\forall \mathbf{x} \in J'$ (resp. $\forall \mathbf{y} \in J''$) existuje $\int_{J''} f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}$ (resp. $\int_{J'} f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}$). Potom je:

$$\int_J f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{xy} = \int_{J'} \left(\int_{J''} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{J''} \left(\int_{J'} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}$$

Dk: Položme $F(\mathbf{x}) = \int_{J''} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$. Dokážeme, že $\int_{J'} F$ existuje a že

$$\int_J f = \int_{J'} F.$$

Zvolme rozdělení P intervalu J tak, aby:

$$\int f - \varepsilon \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq \int f + \varepsilon.$$

Toto P je tvořeno rozděleními P' intervalu J' a P'' intervalu J''.

Máme $\mathcal{B}(P) = \{B' \times B'' \mid B' \in \mathcal{B}(P'),\, B'' \in \mathcal{B}(P'')\}$

a každá cihla P se objeví jako jedna $B' \times B''$. Potom je:

$$F(\mathbf{x}) \leq \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{\mathbf{y} \in B''} \{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\} \cdot \mathrm{vol}(B'')$$

a tedy:

$$S(F,P') \leq \sum_{B' \in \mathcal{B}(P')} \max_{\mathbf{x} \in B'} \left\{ \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{\mathbf{y} \in B''} \{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\} \cdot \mathrm{vol}(B'') \right\} \cdot \mathrm{vol}(B')$$

$$\leq \sum_{B' \in \mathcal{B}(P')} \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{\mathbf{x},\mathbf{y} \in B' \times B''} \{f(\mathbf{x},\mathbf{y})\} \cdot \mathrm{vol}(B') \cdot \mathrm{vol}(B'')$$

$$\leq \sum_{B' \times B'' \in \mathcal{B}(P)} \max_{\mathbf{z} \in B' \times B''} \{f(\mathbf{z})\} \cdot \mathrm{vol}(B' \times B'') = S(f,P).$$

Podobně: $s(f,P) \leq s(F,P')$.

Máme tedy $\int_J f - \varepsilon \le s(F,P') \le \int_{J'} F \le S(F,P') \le \int_J f + \varepsilon$

a $\int_{J'} F$ je roven integrálu $\int_J f$.

Rozšíření definičního oboru na komp. cihlu:

- funkce v n proměnných není typicky definovaná na celé cihle.
  Vezmeme kompaktní D a vložíme ho do cihly J, f rozšíříme na $J \setminus D = 0$.

- To generuje nekonečně mnoho bodů nespojitosti. Ty všechny leží na okraji D a takový okraj má viditelně objem 0.

Konvergence posloupnosti funkcí:

Bodová konvergence:

Mějme $X = (X,d)$, $Y = (Y,d')$ metrické prostory, $f_n : X \to Y$ posl. zobrazení. Existuje-li $\forall x \in X$ lim:

$$\lim_n f_n(x) = f(x),$$

říkáme, že posl. $(f_n)_n$ konverguje bodově k f a píšeme $f_n \to f$.

Př: $f_n(x) = x^n$. Pak $f(x) = \lim_n f_n(x) = 0$ $|x| < 1$, ale $f(1) = 1$

Stejnoměrná konvergence:

Posloupnost $(f_n : (X,d) \to (Y,d'))_n$ konverguje stejnoměrně k $f: X \to Y$ jestliže: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ t.ž. $\forall x \in X\ (n \ge n_0 \Rightarrow d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$.

Mluvíme o stejnoměrně konvergentní posloupnosti a píšeme $f_n \rightrightarrows f$.

Věta: Nechť $f_n: X \to Y$ jsou spojitá zobr. a $f_n \rightrightarrows f$. Potom je f spojitá.

Dk: Zvolme $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Vezmeme n t.ž. $\forall y \in X$, $d'(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Jelikož je f_n spojité, existuje $\delta > 0$ t.ž.
$$d(x,z) < \delta \Rightarrow d'(f_n(x), f_n(z)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Potom pro $d(x,z) < \delta$:
$$d'(f(x), f(z)) \leq d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(z)) + d'(f_n(z), f(z)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Integrál limity funkcí:

Obecně neplatí
$$\int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n$$
ani když všechny $\int_a^b f_n$ existují a všechny f_n jsou omezeny stejnou konstantou.

Př.: Mějme racionální čísla mezi 0 a 1. $\to r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ Položme $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x = r_k \text{ pro } k \leq n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$\int_0^1 f_n = 0 \; \forall n$, limita f posl. f_n je ale Dirichletova funkce, kde $\underline{\int} = 0$, $\overline{\int} = 1$

$\Leftrightarrow$ mám omezený počet 1, nekonečně 0.

Mějme však stejnoměrnou konvergenci. Pak platí:

Věta: Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b \rangle$ a nechť existují Riemannovy integrály $\int_a^b f_n$.
Potom existuje též $\int_a^b f$ a platí:
$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$$

Dk:

Pro $\varepsilon > 0$ zvolme n_0 tak, aby pro $n \geq n_0$ platilo: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x \in \langle a,b \rangle$ (*)

Pro rozdělení $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_{n-1} < t_n = b$ vezměme $m_j = \inf\{f(x) \mid t_{j-1} \leq x \leq t_j\}$
$M_j = \sup\{f(x) \mid t_{j-1} \leq x \leq t_j\}$

a $m_j^n = \inf\{f_n(x) \mid t_{j-1} \leq x \leq t_j\}$
$M_j^n = \sup\{f_n(x) \mid t_{j-1} \leq x \leq t_j\}$.

Podle (*) platí pro $n,k \geq n_0$:
$$|m_j - m_j^n|, |M_j - M_j^n| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ tedy } |M_j^k - M_j^n| \leq \frac{2\varepsilon}{b-a}$$

a pro dolní součty dostaneme

$$|s(f,P) - s(f_n,P)| = \left|\sum (m_i - m_i^n)\cdot(t_i - t_{i-1})\right| \leq \sum |m_i - m_i^n|\cdot(t_i - t_{i-1}) \leq \varepsilon$$

a podobně pro horní součty $|S(f,P) - S(f_n,P)| \leq \varepsilon$.

Nyní vezmeme P takové, aby $\left|\int f_n - S(f_n,P)\right| < \varepsilon$ a $\left|\int f_k - S(f_k,P)\right| < \varepsilon$.

Potom z Δ. nerovnosti: $\left|\int f_k - \int f_n\right| < 4\varepsilon$ a tedy $(\int f_n)_n$ je Cauchyovská.

Existuje tedy $L = \lim_n \int f_n$. Zvolme $n \geq n_0$ dostatečně velké, aby $\left|\int f_n - L\right| < \varepsilon$.

Pokud zvolíme P tak, aby $S(f_n,P) - \varepsilon < \int f_n < s(f_n,P) + \varepsilon$,

dostaneme

$$L - 3\varepsilon \leq \int f_n - 2\varepsilon < s(f_n,P) - \varepsilon \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f_n,P) + \varepsilon \leq \int f_n + 2\varepsilon \leq L + 3\varepsilon$$

a protože $\varepsilon > 0$ libovolné, zjišťujeme, že $L = \underline{\int} f = \overline{\int} f$, tudíž integrál existuje.

Limita funkce v bodě: $\lim_{x \to a} g(x) = A$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.ž. $0 < d(x,a) < \delta \Rightarrow |g(x) - A| < \varepsilon$

Lemma: Nechť je $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = A$ $\forall (x_n)_n$ posl. t.ž. $\lim_n x_n = a$.

Potom $\lim_{x\to a} g(x) = A$.

Dk: Předpokládejme že $\lim_{x\to a} g(x)$ neexistuje, nebo není rovna A. Potom existuje $\varepsilon > 0$ t.ž. $\forall \delta > 0\ \exists x(\delta)$ pro které $0 < |a - x(\delta)| < \delta$, ale $|A - g(x(\delta))| \geq \varepsilon$.

Položme $x_n = x(\frac{1}{n})$. Potom $\lim_n x_n = a$, ale $\lim_{n\to\infty} g(x_n)$ není A. $\boxtimes$

Věta: Nechť je $f: \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Potom je:

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx$$

Dk: $\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ je kompaktní, takže f je stejnoměrně spojitá.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.ž. $\max\{|x-x'|, |y-y'|\} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon$.

Buď $\lim_n y_n = y_0$. Položme $g(x) = f(x,y_0)$ a $g_n(x) = f(x,y_n)$. Je-li $|y_n - y_0| < \delta$,

máme $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ nezávisle na x, tedy $g_n \rightrightarrows g$ a proto

$$\lim_n \int_a^b g_n(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx, \text{ což je: } \lim_n \int_a^b f(x,y_n)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx$$

a tvrzení plyne z lemmatu výše.

Věta: Nechť $f: \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá a nechť má spoj. parc. derivaci $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ v $\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Potom má $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ derivaci v (c,d) a platí:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$$

Dk: Vyberme $y \in (c,d)$ a zvolme $\alpha > 0$ t.ž. $c < y-\alpha < y+\alpha < d$.

Položme $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ a definujme:

$$g(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\left(f(x,y+t) - f(x,y)\right) & \text{pro } t \neq 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} & \text{pro } t = 0 \end{cases}$$

Tato funkce je na komp. $\langle a,b\rangle \times \langle -\alpha, \alpha\rangle$ spojitá:

pro $t \neq 0$ totiž podle Lagrange:

$$g(x,t) - g(x,0) = \frac{1}{t}\left(f(x,y+t) - f(x,y)\right) - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y+\theta t)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

pro $t=0$ plyne ze spojitosti parc. deriv.

Máme tedy $\lim_{t \to 0} \int_a^b g(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ a jelikož pro $t \neq 0$ je:

$$\int_a^b g(x,t) = \frac{1}{t}\left(\int_a^b f(x,y+t) - \int_a^b f(x,y)\right) = \frac{1}{t}\left(F(y+t) - F(y)\right) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad \boxed{X}$$

Rozšíření Riemannova integrálu:

Může být rozšířen tak, že je korektní $\int_a^b \lim_n f_n = \lim \int_a^b f_n$

s předpokladem, že $|f(\mathbf{x})| < K$ s konstantou K.

Potřebujeme získat nespojitou funkci jako limitu spojitých funkcí (problém Dirichletovy funkce)

$\hookrightarrow$ zde nám stejnoměrná limita nepomůže.

Použijeme násl. větu:

Věta: (Tietzova): Je-li Y uzavřená v metrickém prostoru X, potom

každá spojitá $g: Y \to \langle a,b \rangle$ se dá rozšířit na spoj. $f: X \to \langle a,b \rangle$.

Pro uzavřenou podmnožinu D komp. n-rozměrného intervalu J a funkci f spojitou na D

definujme $J_n = \{x \mid d(x,D) \geq \frac{1}{n}\}$.

Potom $g_n = \begin{cases} 0 & \text{na } J_n \\ f & \text{na } D \end{cases}$ je spojitá a může být rozšířena na f_n spoj. na J.

Potom je $\lim f_n = f$ na D a jinde 0.

Fubini a nesoulad

Fubini předpokládá existenci $\int_J f$, což nemusí být pro spoj. $f: D \to \mathbb{R}$

rozšířenou na J (typicky nespojitou na celém okraji D) nijak zřejmé.

Intuitivní vhled: Objem okraje Δ množiny D je typicky 0. Objem sjednocení cihel z rozdělení P

se zmenšuje se zjemňováním P a bude menší než $\varepsilon > 0$ pro dost jemné P.

Potom příspěvek pro dolní a horní součty nad cihlami dotýkajícími se Δ

$\Sigma\{m(f,B) \cdot \mathrm{vol}(B) \mid B \in \beta(P), B \cap \Delta \neq \emptyset\}$

$\Sigma\{M(f,B) \cdot \mathrm{vol}(B) \mid B \in \beta(P), B \cap \Delta \neq \emptyset\}$ bude v součtech $s(f,P), S(f,P)$ zanedbatelný.

Lebesgueův integrál

Zjednodušuje podmínky integrovatelnosti a dovoluje více operací (lim, der)

Některá pravidla:

1) Je-li J interval (cihla) a Riemannův integrál $\int_J f$ existuje, shoduje se s Lebesgueovým.

2) Pokud $\int_{D_n} f$ existuje pro $n = 1, 2 \ldots$, existuje i $\int_{\cup D_n} f$

3) Pokud $\int_{D_n} f$ existuje a posl. $(f_n)_n$ monotónní, je $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$

4) Pokud $\int_D f_n$ existuje a $|f(u)| \leq g$ pro nějaké g, pro které $\int_D g$ existuje, je $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$.

5) (praktický důsl. 4) Je-li D omezená, $|f_n(x)| \leq C$ a $\int_D f_n$ existují, je $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$

6) Buď U okolí bodu t_0 a g t.ž. $\int_D g$ existuje, a $\int_D f(t,x)dx$ existují a $|f(t,x)| \leq g(x)$ $\forall t \in U \setminus \{t_0\}$, potom:

$$\int_D f(t_0,x)\,dx = \lim_{t \to t_0} \int_D f(t,x)\,dx$$

7) Jestliže pro integrovatelnou g $\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \leq g(x)$ a v nějakém okolí U bodu t_0 všechno dává smysl, je

$$\int_D \frac{\partial f(t_0,-)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_D f(t_0,-)$$

Pozn.: Riemannův integrál dělá součty konečných sjednocení. U Lebesgueova lze přistupit i přes spočetné nekonečné součty díky abs. konvergenci.

Integrál na komp. D.

Máme $f: D \to \mathbb{R}$ definovanou na komp. $D \subseteq E_n$. Zvolili jsme cihlu $J \supseteq D$ a definovali $\tilde{f}: J \to \mathbb{R}$ předpisem
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 0 & x \in J \setminus D \end{cases}$$
a zkoušeli definovat $\int_D f = \int_J \tilde{f}$.

Problém: je-li f spoj., existuje $\int_J \tilde{f}$?

Lze udělat:

$\phi = (x \mapsto d(x,D)): J \to \mathbb{R}$ spoj. funkce a tedy:

$J_n = \{x \mid d(x,D) \geq \frac{1}{n}\} = \phi^{-1}[\langle \frac{1}{n}, +\infty)]$ uzavřená a $J_n \cap D = \emptyset$.

Tedy $f_n: J_n \cup D \to \mathbb{R}$: $f_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 0 & x \in J_n \end{cases}$ je spojitá

a podle Tietze lze rozšířit na stejně omezenou spojitou g_n na J.

Potom je $\lim_n g_n = \tilde{f}$ a žádaný integrál existuje podle pravidla 5.

Substituce v integrálu

Buď ϕ rostoucí funkce s derivací definovaná na nějakém okolí komp. int. $\langle a, b\rangle$, zobrazující ho na int. $\langle \phi(a), \phi(b)\rangle$. Buď f spoj. funkce, buď F prim. k f. Potom pro $G = f \circ \phi$ máme:

$$G'(x) = F'(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$$

a tedy podle základní věty analýzy:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\,dx.$$

To má výbornou geometrickou interpretaci.

deformace intervalu $\langle a, b\rangle$ na $\langle \phi(a), \phi(b)\rangle$ popisuje přibližně faktor $\phi'(x)$.

Substituce ve více proměnných

Mějme dánu $D \subseteq E_n$ a prosté reg. zobr. $\phi : U \to E_n$ t.ž. $D \subseteq U$.

Substituční formule pro integrál více proměnných funkce f přes $\phi[D]$ je:

$$\int_{\phi[D]} \mathbf{f} = \int_D \mathbf{f}(\phi(\mathbf{x})) \cdot \left| \frac{D(\phi)}{D(\mathbf{x})} \right| d\mathbf{x}$$

Slabý důkaz:

Stejně, jako byla $\phi'(x)$ kompenzace za deformaci podstavy oblasti nyní máme:

$$\langle x_1, x_1+h \rangle \times \langle x_2, x_2+h \rangle \times \dots \langle x_n, x_n+h \rangle,$$

což bude deformováno na rovnoběžnostěn určený vektory:

$$\phi(\mathbf{x}) + h \cdot \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_2(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \quad i = 1..n$$

který má objem $h^n \cdot \left| \frac{D(\phi(\mathbf{x}))}{D(\mathbf{x})} \right|$