Mějme $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, kde $f: E_2 \to \mathbb{R}$

<- euklidovský prostor

- Pokud je jedna proměnná fixní, je to obyčejná funkce. Avšak pro $f(x,x)$ platí, že v okolí 0 je $f(x,x) = \frac{1}{2}$, zatímco v 0 je $f(x,x) = 0$, tedy není spojitá.

Metrika na množině X je funkce:

$$d: X \times X \to \mathbb{R} \quad \text{t.ž.:}$$

1) $\forall x,y: d(x,y) \geq 0$ a $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2) $\forall x,y: d(x,y) = d(y,x)$
3) $\forall x,y,z: d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ -> trojúhelníková nerovnost

Metrický prostor (X,d) je množina X opatřená metrikou d.

Příklad: Reálná přímka: $\mathbb{R}$ s vzdáleností $d(x,y) = |x-y|$ $(\mathbb{R}, |x-y|)$

Gaussova rovina: $\mathbb{C}$ s vzdáleností $d(x,y) = |x-y|$ $(\mathbb{C}, |x-y|)$

n-rozměrný Euklidovský prostor: E_n jako množina $\{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

s vzdáleností $d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

Nechť J je interval. Množina $F(J) = \{f \mid f: J \to \mathbb{R} \text{ omezená}\}$

s vzdáleností $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in J\}$

Spojitá a stejnoměrně spojitá zobrazení:

Buď (X_1, d_1) a (X_2, d_2) metrické prostory. Zobrazení $f: X_1 \to X_2$ je spojité, jestliže:

$$\forall x \in X_1\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.ž. } \forall y \in X_1,\ d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Stejnoměrně následující znamená:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.ž. } \forall x \dots$$

<- tedy že pro všechny x a y platí jedno ε.

Každé stejnoměrně spojité je zároveň i jednoduše spojité.

Pozorování: Složení dvou (stejnoměrně) spojitých funkcí je opět (stejnoměrně) spojité.

Podprostory Nechť (X,d) je metrický prostor a $Y \subseteq X$.

Definujeme-li $d_Y(x,y) = d(x,y)$ pro $x,y \in Y$, dostáváme metriku Y. Takový prostor (Y, d_Y) je podprostorem (X,d)

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \, (n \geq n_0 \Rightarrow d(x, x_n) < \varepsilon$

Konvergence Buď $(x_n)_n$ konvergentní posloupnost s limitou x.

Potom každá podposloupnost této podposloupnosti $(x_{k_n})_n$ konverguje s limitou x.

V: Zobrazení $f: (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ je spojité $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_n$ konvergentní v (X_1, d_1) posloupnost $(f(x_n)_n)$ konverguje v (X_2, d_2) a platí: $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

I. Nechť f spojité a $\lim_n x_n = x$. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme ze spojitosti $\delta > 0$ tak, aby $d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$ pro $d_1(x,y) < \delta$. Podle definice konvergence posloupnosti existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ je $d_1(x_n, x) < \delta$.

Tedy jeli $n \leq n_0$, máme $d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ a potom $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$

II. Nechť f není spojité. Potom $\exists x \in X_1$ a $\varepsilon_0 > 0$ t.ž. $\forall \delta > 0 \, \exists x(\delta)$ t.ž.

Tedy že neplatí spojitost $\Rightarrow$ $d_1(x, x(\delta)) < \delta$ ale $d_2(f(x), f(x(\delta))) \geq \varepsilon_0$.

Položme $x_n = x\left(\frac{1}{n}\right)$. Potom $\lim_n x_n = x$, ale $(f(x_n))_n$ nemůže konvergovat k $f(x)$. $\boxtimes$

Okolí Pro bod metrického prostoru (X,d) a $\varepsilon > 0$ položme $\Omega_{(X,d)}(x,\varepsilon) = \{y \mid d(x,y) < \varepsilon\}$.

Okolí bodu $x \in (X,d)$ je kterékoliv $U \subseteq X$ t.ž. pro nějaké $\varepsilon > 0$ je $\Omega(x,\varepsilon) \subseteq U$.

T: Jeli U okolí bodu x a $U \subseteq V$, je V okolí bodu x.

Jsou-li U a V okolí bodu x, je $U \cap V$ okolí bodu x.

1) Triviální

2) Jestliže $\Omega(x, \varepsilon_1) \subseteq U$ a $\Omega(x, \varepsilon_2) \subseteq V$, pak $\Omega(x, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \subseteq U \cap V$. $\boxtimes$

Otevřená množina Podmnožina $U \subseteq (X,d)$ je otevřená, je-li okolím každého svého bodu

T: $\forall \Omega_X(x,\varepsilon)$ je otevřená v (X,d)

Buď $y \in \Omega_X(x,\varepsilon)$. Potom $d(x,y) < \varepsilon$. Vezměme $\delta = \varepsilon - d(x,y)$. Podle Δ-nerovnosti je $\Omega(y,\delta) \subseteq \Omega(x,\varepsilon)$. $\boxtimes$

T: Množiny $\emptyset$ a X jsou otevřené. Jsou-li U_i, $i \in J$, otevřené, potom $\bigcup_{i \in J} U_i$ je otevřená a jsou-li U a V otevřené, je $U \cap V$ otevřená.

Uzavřená množina Podmnožina $A \subseteq (X,d)$ je uzavřená v (X,d), jeli $\forall$ posloupnost $(x_n)_n \subseteq A$ konvergentní v X limita $\lim_n x_n \in A$.

Doplňky dělají opak!

T: Podmnožina $A \subseteq (X,d)$ je uzavřená v (X,d) $\iff$ její doplněk $X \setminus A$ je otevřený.

I. Nechť $X \setminus A$ není uzavřená. Tedy

$\exists x \in X \setminus A$ t.ž. $\forall n$ je $\Omega(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq X \setminus A$, to jest $\Omega(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$.

Zvolme $x_n \in \Omega(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Potom $(x_n)_n \subseteq A$ a posloupnost konverguje k $x \notin A$, tedy A není rozhodně uzavřená.

II. Nechť je $X \setminus A$ otevřená a $(x_n)_n \subseteq A$ konverguje k $x \in X \setminus A$. Potom pro nějaké $\varepsilon > 0$ je $\Omega(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$, tedy pro dost velké n, $x_n \in \Omega(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$. $\lightning$ $\boxed{X}$

O: Množiny $\emptyset$ a X jsou uzavřené. Jsou-li A_i, $i \in J$, uzavřené, je i $\bigcap_{i \in J} A_i$ uzavřená.
A jsou-li A, B uzavřené, je i $A \cup B$ uzavřené.

Vzdálenost bodu od množiny. Buď x bod a $A \subseteq X$ podmnožina metrického prostoru (X,d).

Definujeme vzdálenost x od A jako:

$$d(x, A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$$

Uzávěr množiny A je

$$\bar{A} = \{x \mid d(x,A) = 0\}$$

T:
1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$
2) $A \subseteq \bar{A}$
3) $A \subseteq B \implies \bar{A} \subseteq \bar{B}$
4) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
5) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

musí jich n být alespoň stejně

1) $d(x, \emptyset) = +\infty$

2) triviální 3) triviální

4) Podle ③ máme $\overline{A \cup B} \supseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. Nechť $x \in \overline{A \cup B}$ ale $x \notin \bar{A}$. Pak $\alpha = d(x,A) > 0$. Tedy $\forall y \in A \cup B$ t.ž. $d(x,y) < \alpha$ jsou v B, tedy $x \in \bar{B}$.

5) Buď $d(x, \bar{A}) = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom máme $z \in \bar{A}$ t.ž. $d(x,z) < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro toto z zvolíme $y \in A$ t.ž. $d(z,y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Podle Δ-nerovnosti tedy $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Tedy $x \in \bar{A}$.

T: $\bar{A}$ je množina všech limit konvergentních posloupností $(x_n)_n \subseteq A$.

T: $\bar{A}$ je uzavřená a je to nejmenší uzavřená množina obsahující A. Tedy:

$$\bar{A} = \bigcap \{ B \mid A \subseteq B,\ B \text{ je uzavřená} \}$$

Nechť $(x_n)_n \subseteq \bar{A}$ konverguje k x. $\forall n$ zvolme $y_n \in A$ tak, aby $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$.

Potom $\lim_n y_n = x$ a $x \in \bar{A}$.

Nyní buď B uzavřená a buď $A \subseteq B$. Je-li $x \in \bar{A}$, můžeme zvolit konvergentní posloupnost $(x_n)_n$ v A, a tedy B, takovou, že $\lim_n x_n = x$. Máme tedy $x \in B$.

V: Buďte (X_1, d_1), (X_2, d_2) metrické prostory a $f: X_1 \to X_2$ zobrazení. Následující jsou ekvivalentní:

1) f je spojité
2) $\forall x \in X_1$ a $\forall$ okolí V bodu $f(x)$ $\exists$ okolí U bodu x takové, že $f[U] \subseteq V$
3) $\forall$ otevřenou U v X_2 je vzor $f^{-1}[U]$ otevřený v X_1.
4) $\forall$ uzavřenou A v X_2 je vzor $f^{-1}[A]$ uzavřený v X_1.
5) $\forall A \subseteq X_1$ je $f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$

Homeomorfismus Spojité zobrazení $f: (X,d) \to (Y,d')$ se nazývá homeomorfismem, existuje-li spojité $g: (Y,d') \to (X,d)$ t.ž. $f \circ g = id_Y$ a $g \circ f = id_X$. Pak takové prostory (X,d) a (Y,d') jsou homeomorfní.

Topologická vlastnost je taková vlastnost, co zachovávají homeomorfismy.

- Konvergence
- Otevřenost
- Uzavřenost
- Uzávěr
- Okolí
- Spojitost samo (stejnoměrná vsak není)

Ekvivalentní metriky

d_1 a d_2 na téže množině jsou ekvivalentní, je-li $id_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ homeomorfismus.

Silně ekvivalentní metriky

d_1 a d_2 jsou na téže množině silně ekvivalentní, $\exists$ kladné konstanty α, β t.ž.

$\forall x, y \in X$:

$$\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y)$$

To umožňuje jednodušší práci se vzdáleností v Euklidovských prostorech $\{(x_1 \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$, kde jsme zatím měli vzdálenost

$$d((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Položme

$$\lambda((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad \text{a} \quad \sigma((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \max_i |x_i - y_i|.$$

T: d, λ, σ jsou silně ekvivalentní metriky na $\mathbb{E}_n$.

Součiny

: Buďte (X_i, d_i), $i = 1 \dots n$, metrické prostory. Na kartézském součinu $\prod_{i=1}^{n} X_i$ definujeme metriku:

$$d((x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n)) = \max_i (d_i(x_i, y_i))$$

Získaný metrický součin bude značit $\prod_{i=1}^{n} (X_i, d_i)$ → nikoli $(X_1, d_1) \times \dots \times (X_n, d_n)$

Tedy $(\mathbb{E}_n, \sigma) = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}} = \mathbb{R}^n$

V: Projekce $p_j = ((x_i)_i \mapsto x_j) : \prod_{i=1}^{n} (X_i, d_i) \to (X_j, d_j)$ jsou spojitá zobrazení.

V: Buďte $f : (Y, d') \to (X_j, d_j)$ libovolná spojitá zobrazení. Potom jednoznačně určené zobrazení $f : (Y, d') \to \prod_{i=1}^{n} (X_i, d_i)$ splňující $p_j \circ f = f_i$, tedy definované předpisem $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$, je spojité.