Opakování.

Věta. (Fubini) *Vezměmě produkt* $J = J' \times J'' \subseteq \mathbb{E}_{m+n}$ *intervalů* $J' \subseteq \mathbb{E}_m$, $J'' \subseteq \mathbb{E}_n$. *Nechť* $\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{xy}$ *existuje a nechť pro každé* $\mathbf{x} \in J'$ *(resp.* $\mathbf{y} \in J''$*) existuje integrál* $\int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}$ *(resp.* $\int_{J'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x}$*). Potom*

$$\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{xy} = \int_{J'}(\int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y})d\mathbf{x} = \\ = \int_{J''}(\int_{J'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x})d\mathbf{y}.$$

Jak větu obvykle používáme. Definiční obor.

Úskalí, ale není to tak zlé, jak to vypadá, to bude vysvětleno později.

Konvergence posloupnosti funkcí: bodová a stejnoměrná.

Bodová konvergence:

$X = (X, d), Y = (Y, d')$ metrické prostory, $f_n : X \to Y$ posloupnost zobrazení.

Existuje-li pro každé $x \in X$ limita

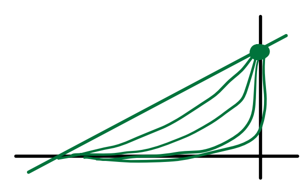
$$\lim_n f(x) = f(x)$$

říkáme, že posloupnost $(f_n)_n$ *konverguje bodově* k f a píšeme

$$f_n \to f.$$

Příklad. Bodová konvergence nezachovává pěkné vlastnosti funkcí f_n, ani spojitost ne. Vezměme $X = Y = \langle 0, 1\rangle$ a definujme funkce f_n předpisy

$$f_n(x) = x^n.$$



Potom $f(x) = \lim_n f_n(x)$ je 0 pro $x < 1$, ale $f(1) = 1$.

je to vlastně konvergence v metrickém prostoru

$d(f,g) = \sup |f(x) - g(x)|$

Stejnoměrná konvergence:

Posloupnost $(f_n : (X, d) \to (Y, d'))_n$ konverguje *stejnoměrně* k $f : X \to Y$ jestliže

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0$ t.že $\forall x \in X \;\; (n \geq n_0 \;\Rightarrow\; d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$.

Mluvíme o *stejnoměrně konvergentní posloupnosti* zobrazení a píšeme

$$f_n \rightrightarrows f.$$

Věta. *Nechť $f_n : X \to Y$ jsou spojitá zobrazení a $f_n \rightrightarrows f$. Potom je f is spojité.*

Důkaz. Zvolme $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Vezměme n takové, že

$$\forall y \in X, \; d'(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Jelikož f_n je spojité, existuje $\delta > 0$ takové, že

$$d(x, z) < \delta \quad \Rightarrow \quad d'(f_n(x), f_n(z)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Potom pro $d(x, z) < \delta$,

$$d'(f(x), f(z)) \leq d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(z)) + d'(f_n(z), f(z)) < \\ < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Integrál limity funkcí.

Obecně neplatí

$$\int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n,$$

ani když všechny $\int_a^b f_n$ existují a všechny funkce f_n jsou omezeny stejnou konstantou.

<u>Příklad</u>: Seřaďme racionální čísla mezi 0 a 1 do posloupnosti

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \ .$$

Položme

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x = r_k \text{ pro } k \le n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom zřejmě $\displaystyle\int_0^1 f_n$ existuje a je 0 pro každé n. Limita f posloupnosti f_n je však známá Dirichletova funkce pro kterou je (zřejmě) dolní integrál 0 a horní integrál 1.

Pro stejnoměrnou konvergenci však platí

Věta. *Nechť* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $\langle a, b\rangle$ *a nechť existují Riemannovy integrály* $\int_a^b f_n$. *Potom existuje též* $\int_a^b f$ *a platí*

$$\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n.$$

Důkaz. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme n_0 tak aby pro $n \geq n_0$ platilo

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (*)$$

pro všechny $x \in \langle a, b\rangle$. Pro rozdělení
$P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ vezměme

$$m_j = \inf\{f(x) \,|\, t_{j-1} \leq x \leq t_j\},$$
$$M_j = \sup\{f(x) \,|\, t_{j-1} \leq x \leq t_j\} \text{ a}$$
$$m_j^n = \inf\{f_n(x) \,|\, t_{j-1} \leq x \leq t_j\},$$
$$M_j^n = \sup\{f_n(x) \,|\, t_{j-1} \leq x \leq t_j\}.$$

Podle $(*)$ platí pro $n, k \geq n_0$

$$|m_j - m_j^n|,\ |M_j - M_j^n| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ a tedy } |M_j^k - M_j^n| \leq \frac{2\varepsilon}{b-a}$$

a pro dolní součty dostaneme

$$\begin{aligned}|s(f,P)-s(f_n,P)| &= \left|\sum(m_i-m_i^n)(t_i-t_{i-1})\right| \le \\ &\le \sum|m_i-m_i^n|(t_i-t_{i-1}) \le \varepsilon\end{aligned}$$

a podobně pro horní součty

$$|S(f,P)-S(f_n,P)| \le \varepsilon.$$

Nyní vezměme P takové aby $|\int f_n - S(f_n,P)| < \varepsilon$ a $|\int f_k - S(f_k,P)| < \varepsilon$; potom vidíme z trojúhelníkové nerovnosti že that $|\int f_k - \int f_n| < 4\varepsilon$ a tedy že posloupnost $(\int f_n)_n$ je Cauchyovská. Existuje tedy limita $L = \lim_n \int f_n$. Zvolme $n \ge n_0$ dostatečně velké aby $|\int f_n - L| < \varepsilon$.

Pokud zvolíme P tak aby

$$S(f_n,P)-\varepsilon < \int f_n < s(f_n,P)+\varepsilon$$

dostaneme

$$\begin{aligned}L-3\varepsilon \le \int f_n - 2\varepsilon < s(f_n,P)-\varepsilon \le s(f,P) \le \\ \le S(f,P) \le S(f_n,P)+\varepsilon \le \int f_n + 2\varepsilon \le L+3\varepsilon\end{aligned}$$

a protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné zjišťujeme, že $L = \underline{\int} f = \overline{\int} f$.

Poznámka. Příklad Riemannovsky integrovatelných funkcí bodově konvergujících k Dirichletově funkci naznačuje, že by problém mohl být spíš v tom, že limitní funkce integrovatelná není, než v tom, že by se hodnota jejího integrálu od té limity lišila, To je pravda jen zčásti. Je to tak,že vezmeme-li mocnější Lebesgueův integrál, vyjde nám, že integrál Dirichletovy funkce je 0 (jak ostatně naznačuje intuice: ta část intervalu na níž je funkce nenulová je nekonečně menší než ta kde hodnota je 0).

Ale ať už je síla integrálu jakákoli, formule

$$\int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n$$

nemůže obecně platit.

Uvažujme funkce

$$f_n, g_n : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

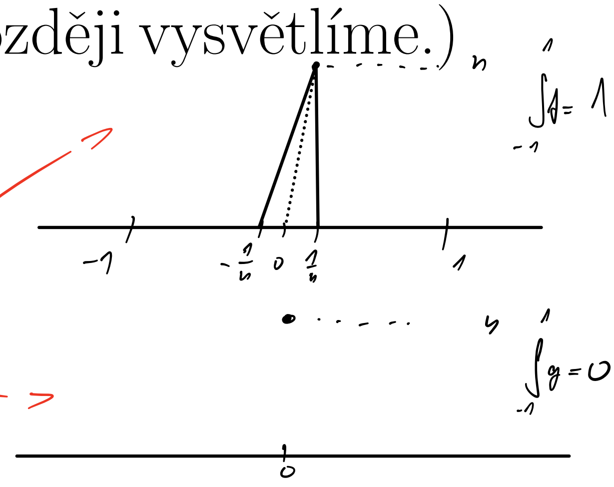
definované předpisy

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{pro} \quad x \le -\frac{1}{n} \quad \text{a} \quad x \ge \frac{1}{n}, \\ n + n^2 x \quad \text{pro} \quad -\frac{1}{n} \le x \le 0, \\ n - n^2 x \quad \text{pro} \quad 0 \le x \le \frac{1}{n}, \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{pro} \quad x \ne 0, \\ n \quad \text{pro} \quad x = 0 \end{cases}$$

Pro každé n je $\int_a^b f_n = 1$ a $\int_a^b g_n = 0$ zatím co $\lim_n f_n = \lim_n g_n$.

(Ve skutečnosti se ukáže, že rovnost $\int_a^b \lim_n g_n = \lim_n \int_a^b g_n$ je korektní, ta s funkcemi f_n není; to později vysvětlíme.)



Ale bodová limita je stejná.

Limita funkce v bodě:

$$\lim_{x \to a} g(x) = A$$

znamená, že

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ takové že $0 < d(x, a) < \delta \Rightarrow |g(x) - A)| < \varepsilon$.

Lemma. *Nechť je* $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = A$ *pro každou posloupnost* $(x_n)_n$ *takovou, že* $\lim_n x_n = a$. *Potom je* $\lim_{x \to a} g(x) = A$.

Důkaz. Nechť $\lim_{x \to a} g(x)$ neexistuje nebo je různá od A. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ můžeme zvolit $x(\delta)$, splňující $0 < |a - x(\delta)| < \delta$ a $|A - g(x(\delta))| \geq \varepsilon$. Položme $x_n = x(\frac{1}{n})$. Potom $\lim_n x_n = a$, ale $\lim_{n \to \infty} g(x_n)$ není A.

Věta. *Nechť je*

$$f : \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$$

spojitá funkce. Potom je

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x, y_0)\, dx.$$

Důkaz. $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ je kompaktní, takže f je stejnoměrně spojitá. Pro každé $\varepsilon > 0$ tedy máme $\delta > 0$ takové že

$$\max\{|x - x'|, |y - y'|\} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Buď $\lim_n y_n = y_0$. Položme $g(x) = f(x, y_0)$ a $g_n(x) = f(x, y_n)$. Je-li $|y_n - y_0| < \delta$ máme $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ nezávisle na x, tedy $g_n \rightrightarrows g$, a proto $\lim_n \int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, a dále
$\lim_n \int_a^b f(x, y_n)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x, y_0)\mathrm{d}x$; nyní použijme předchozí Lemma.

Věta. *Nechť* $f : \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá a nechť má spojitou parciální derivaci* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *v* $\langle a,b\rangle \times (c,d)$*. Potom má* $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ *derivaci v* (c,d) *a platí*

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

Důkaz. Vyberme $y \in (c,d)$ a zvolme $\alpha > 0$ tak aby $c < y-\alpha < y+\alpha < d$. Položme $F(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ a definujme

$$g(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t}(f(x,y+t) - f(x,y)) & \text{pro} \;\; t \neq 0, \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} & \text{pro} \;\; t = 0. \end{cases}$$

Tato funkce g je spojitá na kompaktním $\langle a,b\rangle \times \langle -\alpha, +\alpha\rangle$. To je zřejmé pro $t \neq 0$; podle Lagrangeovy věty,

$$g(x,t) - g(x,0) = \frac{1}{t}(f(x,y+t) - f(x,y)) - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \\ = \frac{\partial f(x,y+\theta t)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

a spojitost v $(x,0)$ plyne ze spojitosti parciální derivace.

Máme tedy

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b g(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x.$$

a jelikož pro $t \neq 0$ je

$$\int_a^b g(x,t) = \frac{1}{t}\left(\int_a^b f(x,y+t) - \int_a^b f(x,y)\right) = \frac{1}{t}(F(y+t)-F(y))$$

dostáváme naše tvrzení.

**První poznámka
o Lebesgueově integrálu.**

Riemanův integrál může být rozšířen tak, že např. je korektní počítat

$$\int \lim f_n = \lim \int f_n$$

již za předpokladu že $|f_n(\mathbf{x})| \leq K$ s konstantou K.

To je důležité: Potřebujeme získat

nespojitou funkci

jako

limitu spojitých funkcí.

V tom nám stejnoměrná limita nepomůže.

Co můžeme udělat: Použijeme **Tietzeovu Větu:** *Je-li Y uzavřená v metrickém prostoru X potom každá spojitá $g : Y \to \langle a, b\rangle$ se dá rozšířit na spojitou $f : X \to \langle a, b\rangle$.*

Pro uzavřenou podmnožinu D kompaktního n-rozměrného intervalu J a funkci f spojitou na D definujme

$$J_n = \{x \mid d(x, D) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Potom g_n definovaná na J_n jako 0, a jako f na D je spojitá, a může být rozšířena na f_n spojitou na J. Potom je

$$\lim f_n \text{ rovna } f \text{ na } D \text{ a } 0 \text{ jinde.}$$

Podrobnosti.

Text: Kapitola XVIII, 2