Důsledek: Spojitá reálná fce na kompaktním prostoru má maximum a minimum.

- kompaktní má nejmenší a největší prvek, je totiž omezená a uzavřená.

Důsledek: Je-li X kompaktní a $f: X \to Y$ spojitá, je $\forall A \subseteq X$ obraz $f[A]$ uzavřený v Y.

Věta: Buď $F(x,y)$ reálná funkce definovaná v nějakém okolí bodu (x_0, y_0).

Nechť má F spojité parciální derivace do řádu $k \geq 1$ a nechť $F(x_0,y_0) = 0$

a $\left| \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \right| \neq 0$. Potom existují $\delta > 0$, $\Delta > 0$ t.ž. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\exists!\, y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ splňující $F(x,y) = 0$.

Označíme-li toto y jako $y = f(x)$, potom

$f: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ má spojité derivace řádu k.

Dk: Buď $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ jsou spojité, $A(\delta) = \{x \mid |x - x_0| \leq \delta\}$

je uzavřená a omezená, tedy kompaktní a

$\exists\, a > 0, K, \delta_1 > 0$ a $\Delta > 0$ t.ž. pro

$(x,y) \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times \langle y_0 - \Delta, y_0 + \Delta \rangle$ máme $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \geq a$

a $\left| \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \right| \leq K$.

Funkce f: pro pevné $x \in U(\delta_1) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ definujeme $\mathcal{Y}_x$ na $y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ předpisem

$$\mathcal{Y}_x(y) = F(x,y)$$

Potom je $\mathcal{Y}_x'(y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} > 0$ a tedy $\forall\, \mathcal{Y}_x(y)$ roste v y

a $\mathcal{Y}_{x_0}(y_0 - \Delta) < \mathcal{Y}_{x_0}(y_0) = 0 < \mathcal{Y}_{x_0}(y_0 + \Delta)$.

F je spojitá, tedy pro $0 < \delta \leq \delta_1$, $\forall x \in U(\delta)$, $\mathcal{Y}_x(y_0 - \Delta) < 0 < \mathcal{Y}_x(y_0 + \Delta)$.

$\mathcal{Y}_x$ roste, tedy je prostá, takže $\exists!\, y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta)$ t.ž. $\mathcal{Y}_x(y) = 0$

$\Leftrightarrow$ to jest $F(x,y) = 0$. Označme toto y jako $f(x)$.

Vlastnosti funkce f: Podle Lagrangeovy věty: $F(t, f(x))$ musí být vždy 0.

$$0 = F(t+h, f(t+h)) - F(t, f(t)) = F(t+h, f(t) + (f(t+h) - f(t))) - F(t, f(t)) =$$

$$\frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial x} h + \frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial y} \cdot (f(t+h) - f(t))$$

takže:

$$f(t+h) - f(t) = -h \cdot \frac{\frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial x}}{\frac{\partial F(t+\theta h, f(t) + \theta(f(t+h) - f(t)))}{\partial y}} \quad \text{pro} \quad 0 < \theta < 1. \quad (*)$$

Tedy $|f(t+h) - f(t)| \leq |h| \cdot \left|\frac{K}{a}\right|$ a f je spojitá a dále z $(*)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = - \frac{\frac{\partial F(t, f(t))}{\partial x}}{\frac{\partial F(t, f(t))}{\partial y}} = f'(t)$$

a to můžeme derivovat, dokud to pravá (levá) strana dovolí.

$\downarrow$ 10 doplnit

Př.: $F_1(x, y_1, y_2) = 0$

$F_2(x, y_1, y_2) = 0$

a pokusme se najít řešení $y_i = f_i(x)$ pro $i = 1,2$ v nějakém okolí bodu (x^0, y_1^0, y_2^0).

Mějme $\psi(x, y_1) = y_2$.

$$G(x, y_1) = F_1(x, y_1, \psi(x, y_1))$$

A řešení $y_1 = f_1(x)$ v okolí (x^0, y_1^0) může být substituováno do ψ, tedy $y_2 = f_2(x) = \psi(x, f_1(x))$.

Tedy jsme předpokládali:

- spojité parciální derivace fcí F_i.
- potom jsme potřebovali pro získání ψ:

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_2}(x^0, y_1^0, y_2^0) \neq 0.$$

- Konečně jsme potřebovali:

tohle je nenulové z předpokladu

$$\frac{\partial G}{\partial y_1}(x^0, y_1) = \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial \psi}{\partial y_1} \neq 0 \qquad (**)$$

- Užijeme formuli

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_1}$$

A transformujeme tím $**$

A toto je determinant!

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1 \cdot \partial y_2} \frac{\partial F_2}{} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2 \cdot \partial y_1}\frac{\partial F_2}{}\right) \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right) \neq 0.$$