

Opakování.

Stejnoměrná spojitost. $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ je *stejnoměrně spojitá* jestliže

$$\forall \varepsilon \exists \delta \text{ tak že } d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Přesněji, kvantifikujeme-li x a y :

$$\forall \varepsilon \exists \delta \text{ t.ž. } \forall x \forall y \, d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Posice $\forall x$ je zásadní.

Prostá spojitost žádá

$$\forall x \forall \varepsilon \exists \delta \text{ t.ž. } \forall y \dots$$

Stejnoměrná spojitost je silnější. Platí však

Věta. *Je-li (X, d) kompaktní, je každé spojitě $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ stejnoměrně spojitě.*

Speciálně to platí pro spojitě reálné funkce na kompaktních intervalech.

Objemy (obsahy) (pro $A \subseteq \mathbb{E}_n$)

Vlastnosti:

- $A \subseteq B \Rightarrow \text{vol}(A) \leq \text{vol}(B)$
- A, B disjunktní $\Rightarrow \text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B)$
- vol se zachovává při isometrii
- v $\mathbb{E}_n$:
 $\text{vol}(\prod_i \langle a_i, b_i \rangle) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$

Obsahy jednotkových stran

Fakt. *Obecně platí*

$$\text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B) - \text{vol}(A \cap B).$$

Objem stěn cihel je nula, tedy **objem sjednocení cihel protínajících se jen ve stěnách je součet jejich objemů.**

(Mluvíme o skoro disjunktních sjednoceních.)

Riemannův integrál v jedné proměnné:

Rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$

$$P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

Zjemnění.

Jemnost rozdělení P ,

$$\mu(P) = \max_j (t_j - t_{j-1}).$$

Dolní a horní součty

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^n m_j (t_j - t_{j-1}) \quad \text{resp.}$$

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^n M_j (t_j - t_{j-1})$$

kde

$$m_j = \inf\{f(x) \mid t_{j-1} \leq x \leq t_j\},$$

$$M_j = \sup\{f(x) \mid t_{j-1} \leq x \leq t_j\}.$$

Dolní resp. horní Riemannův integrál funkce f

$$\int_{\overline{a}}^b f(x)dx = \sup\{s(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\} \quad \text{a}$$

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)dx = \inf\{S(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\}.$$

Jsou-li si rovny, společná hodnota

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\overline{a}}^b f(x)dx = \int_a^{\overline{b}} f(x)dx$$

je Riemannův integrál funkce f přes $\langle a, b \rangle$.

Je-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$, pak

$\int_a^b f(x)dx$ je objem (obsah) množiny

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, x \leq y \leq f(x)\}$$

Tvrzení. *Riemannův integrál $\int_a^b f(x) dx$ existuje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje rozdělení P takové, že*

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Věta. *Pro každou spojitou funkci $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$.*

Věta. (Integrální věta o střední hodnotě) *Nechť je $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá. Potom existuje $c \in \langle a, b \rangle$ takové, že*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad \rightarrow \quad m \leq \frac{A}{(b-a)} \leq M$$

je libovolné infimum / supremum

Theorem. (Základní věta analýsy) *Bud' $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá. Pro $x \in \langle a, b \rangle$ položme*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Potom je $F'(x) = f(x)$.

Důsledky. 1. *Spojitá funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ má na intervalu (a, b) primitivní funkci spojitou na $\langle a, b \rangle$. Pro kteroukoli primitivní funkci G funkce f na (a, b) spojitou na $\langle a, b \rangle$ platí*

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

2. (Integrační věta. o střední hodnotě)

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f = f(c)(b-a) = F'(c)(b-a)$$

Riemannův integrál ve více proměnných.

V $\mathbb{E}_n$: *Kompaktní interval* (n -rozměrný kompaktní interval) je

$$J = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$$

(je skutečně kompaktní); krátce, *interval*, nebo *cihla*.

Rozdělení intervalu J je posloupnost $P = (P^1, \dots, P^n)$ rozdělení

$$P^j : a_j = t_{j0} < t_{j1} < \cdots < t_{j,n_j-1} < t_{j,n_j} = b_j,$$

Intervalům

$$\langle t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1} \rangle \times \cdots \times \langle t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1} \rangle$$

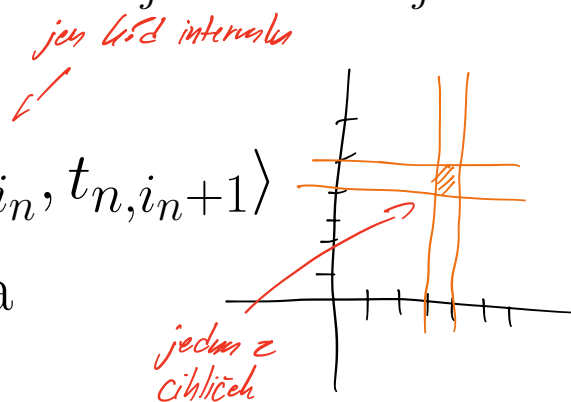
říkáme *cihly* rozdělení P , a

$$\mathcal{B}(P)$$

je množina všech cihel rozdělení P .

Je to skoro disjunkt rozklad intervalu J .

< Cihličky se ⁷protínají jenom na své hraně.
Čím jemnější kódy, tím menší objem $\mathcal{B}$ cihliček.



Různé cihly z $\mathcal{B}(P)$ se totiž zřejmě setkávají jen v podmnožinách okrajů, tedy v množinách objemu 0. Máme tedy

Pozorování.

$$\text{vol}(J) = \sum \{\text{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(J)\}.$$

Jemnost rozdělení.

Diametr intervalu

$J = \langle r_1, s_1 \rangle \times \cdots \times \langle r_n, s_n \rangle$ je

$$\text{diam}(J) = \max_i (s_i - r_i)$$

Jemnost rozdělení P je

$$\mu(P) = \max \{\text{diam}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Zjemnění. Rozdělení $Q = (Q^1, \dots, Q^n)$ *zjemňuje* rozdělení $P = (P^1, \dots, P^n)$ jestliže každé Q^j zjemňuje P^j .

Pozorování. Zjemnění Q rozdělení P vytváří rozdělení

$$Q_B \quad \text{cihel} \quad B \in \mathcal{B}(P)$$

a máme skoro disjunktní sjednocení

$$\mathcal{B}(Q) = \bigcup \{ \mathcal{B}(Q_B) \mid B \in \mathcal{B}(P) \}.$$

Pozorování. Každá dvě rozdělení P, Q n -rozměrného kompaktního intervalu J mají společné zjemnění.

Je dána omezená $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ na n -rozměrném kompaktním intervalu J , a $B \subseteq J$ je n -rozměrný kompaktní podinterval intervalu J . Položme

$$m(f, B) = \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\} \quad \text{a} \\ M(f, B) = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\}.$$

Fakt. $m(f, B) \leq M(f, B)$ a je-li $C \subseteq B$ je

$$m(f, C) \geq m(f, B) \quad \text{a} \quad M(f, C) \leq M(f, B).$$

Pro rozdělení P intervalu J a omezenou funkci $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ definujme

$$s_J(f, P) = \sum \{m(f, B) \cdot \text{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\}, \\ S_J(f, P) = \sum \{M(f, B) \cdot \text{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Obecné pozorování:

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená,

$$X = \bigcup X_i, \quad X_i = \bigcup X_{ij}$$

jsou konečná skoro disjunktní sjednocení.

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in X_i\},$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x) \mid x \in X_{ij}\}$$

Triviálně: $M_{ij} \leq M_i$

(M_i je horní mez množiny $\{f(x) \mid x \in X_{ij}\}$).

Tedy je

$$\begin{aligned} \sum_i M_i \text{vol}(X_i) &= \sum_i M_i \sum_j \text{vol}(X_{ij}) = \\ &= \sum_{ij} M_i \text{vol}(X_{ij}) \geq \sum_{ij} M_{ij} \text{vol}(X_{ij}) \end{aligned}$$

Podobně pro infima.

Tvrzení. *Nechť Q zjemňuje P . Potom*

$$s(f, Q) \geq s(f, P) \quad \text{a} \quad S(f, Q) \leq S(f, P).$$

Proof: Použijeme předchozí pozorování pro $\{X_i \mid i\} = \mathcal{B}(P)$, $\{X_{ij} \mid j\} = \mathcal{B}(Q_B)$, a samozřejmě i pro $\{X_{ij} \mid ij\} = \mathcal{B}(Q)$.

Tvrzení. *Pro libovolná dvě rozdělení P, Q intervalu J máme $s(f, P) \leq S(f, Q)$.*

Proof. Jelikož je triviálně $s(f, P) \leq S(f, P)$, použitím společného zjemnění R rozdělení P, Q dostaneme

$$s(f, P) \leq s(f, R) \leq S(f, R) \leq S(f, Q).$$

Tedy je množina $\{s(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\}$ shora omezená a můžeme definovat *dolní Riemannův integrál* funkce f přes J jako

$$\underline{\int}_J f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \sup\{s(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\};$$

podobně definujeme *horní Riemannův integrál*

$$\overline{\int}_J f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \inf\{S(f, P) \mid P \text{ rozdělení}\}.$$

Jsou-li si rovny, máme *Riemannův integrál funkce f přes J* ; značení

$$\int_J f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \text{nebo prostě} \quad \int_J f$$

Jiné značení

$$\int_J f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, x_n$$

nebo

$$\int_J f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

To dává víc smyslu než se na první pohled zdá.

Zde je zřejmý jednoduchý odhad:

$$\begin{aligned} \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in J\} \cdot \text{vol}(J) &\leq \int_J f \leq \\ &\leq \overline{\int_J f} \leq \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in J\} \cdot \text{vol}(J). \end{aligned}$$

Tvrzení. *Riemannův integrál $\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ existuje právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje rozdělení P takové, že*

$$S_J(f, P) - s_J(f, P) < \varepsilon.$$

Uvědomte si jak snadné to je: nerovnost dává

$$S_J(f, P) < \varepsilon + s_J(f, P)$$

a z toho máme

$$\overline{\int} \leq S_J(f, P) < \varepsilon + s_J(f, P) \leq \varepsilon + \underline{\int} \leq \varepsilon + \overline{\int};$$

ε může být libovolně malé.

Theorem. *Každá spojitá funkce $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ na n -rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál $\int_J f$.*

Důkaz. V $\mathbb{E}_n$ budeme užívat vzdálenost σ definovanou předpisem

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|.$$

Jelikož je f stejnoměrně spojitá můžeme pro $\varepsilon > 0$ zvolit $\delta > 0$ takové, že

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \frac{\varepsilon}{\text{vol}(J)}.$$

Připomeňme si jemnost $\mu(P)$. Je-li $\mu(P) < \delta$ je $\text{diam}(B) < \delta$ pro všechny $B \in \mathcal{B}(P)$ a tedy

$$\begin{aligned} M(f, B) - m(f, B) &= \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\} - \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\} \leq \\ &\leq \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B\} < \frac{\varepsilon}{\text{vol}(J)} \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \\ &= \sum \{(M(f, B) - m(f, B)) \cdot \text{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\text{vol}(J)} \sum \{\text{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\} = \frac{\varepsilon}{\text{vol} J} \text{vol}(J) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podrobnosti.

Text: Kapitola XVI, Sections 1,2,3
Kapitola XIII, 2.3