Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 11

11. prosince 2019

1. (předchozí DÚ) Nechť T^* je teorie s axiomy rovnosti. Tablo metodou dokažte, že

   (a) $T^* \models x = y \;\rightarrow\; y = x$ (symetrie $=$)

   (b) $T^* \models (x = y \;\wedge\; y = z) \;\rightarrow\; x = z$ (tranzitivita $=$)

   Nápověda: pro (a) v axiomu rovnosti (*iii*) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, pro (b) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

2. Nechť L je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomy pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*, tj. v $\mathcal{A}$ existují prvky c_i pro $i \in \mathbb{N}$ s

   $$\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0.$$

   (Tento příklad ukazuje, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v jazyce 1. řádu.)

3. Převeďte následující formule do prenexního tvaru.

   (a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \rightarrow Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x,y) \vee Q(x,y))$

   (b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$

   (c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$

4. K předchozím formulím nalezněte Skolemovy varianty.

5. Ukažte, že Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, např. ověřte

   (a) $\models (\forall x)P(x,f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$

   (b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x,y) \rightarrow (\forall x)P(x,f(x))$

6. Nechť T' je rozšíření teorie $T = \{(\exists y)(x+y=0), (x+y=0) \wedge (x+z=0) \rightarrow y = z\}$ jazyka $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ pomocí axiomů

   $$\begin{aligned} -x = y \quad &\leftrightarrow \quad x + y = 0 \\ x < y \quad &\leftrightarrow \quad x \leq y \;\wedge\; \neg(x = y) \end{aligned}$$

   Nalezněte formule původního jazyka L ekvivalentní v T' následujícím formulím.

   (a) $x + (-x) = 0$

   (b) $x + (-y) < x$

   (c) $-(x+y) < -x$

7. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ má mezi axiomy jediný axiom φ, který není otevřený:

   $$x \neq 0 \;\rightarrow\; (\exists y)(x \cdot y = 1).$$

   Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models \; (x \neq 0 \;\wedge\; x \cdot y = 1 \;\wedge\; x \cdot z = 1) \;\rightarrow\; y = z$.

   (a) Nalezněte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f.

   (b) Nechť T' je teorie vzniklá z T nahrazením φ za φ_S. Je $T' \models \varphi$?

   (c) Lze každý model teorie T *jednoznačně* expandovat na model teorie T'?

8. Nechť T je předchozí teorie. Označme ψ formuli $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

   (a) Platí v T podmínky existence a jednoznačnosti pro formuli $\psi(x,y)$ a proměnnou y?

(b) Sestrojte extenzi T^* teorie T o definovaný symbol f formulí ψ.

(c) Je T^* ekvivalentní teorii T' z přechozího příkladu?

(d) K následující formuli nalezněte v T^* ekvivalentní formuli původního jazyka L.

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

9. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.

   (a) $L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$, kde P, Q jsou unární resp. binární relační, f je unární funkční, a, b jsou konstantní symboly.

   (b) $L = \langle P, f, g, a \rangle$, kde P je binární relační, f, g jsou unární funkční, a je konstantní.

10. Sestrojte Herbrandův model pro následující teorie anebo nalezněte nejsplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů. Předpokládejte, že jazyk obsahuje konst. symboly a, b.

    (a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$

    (b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$

    (c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$

    (d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \to P(x, y)\}$

11. Převeďte následující formule na ekvisplnitelné formule v množinové reprezentaci.

    (a) $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

    (b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

    (c) $\neg(\exists x)((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$

    (d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \to R(x, y))$

Poznámka

DÚ: příklad 8 (za 1b, toto je poslední DÚ). Druhý test se bude psát na cvičení 8. ledna.

Ekvisplnitelnost -> není to ekvivalentní formule, ale jejich splnitelnosti jsou (např.: pro tablo) shodné.

3. Převeďte následující formule do prenexního tvaru.

(a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \rightarrow Q(y,z)) \wedge (\exists y')((\forall x'')R(x'',y') \vee Q(x,y'))$

$$(\forall y)((\exists x)P(x,y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y')(\forall x'')(R(x'',y') \vee Q(x,y')).$$

předsunutí

$((Qx)\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (Qx)(\varphi \wedge \psi)$

$$(\exists y')(\forall y)\big((\forall x')(P(x',y) \to Q(x,z)) \wedge (\forall x'')(R(x'',y') \vee Q(x,y'))\big)$$

předsunutí

$$\forall z \forall x (\exists y')(\forall y)(\forall x')(\forall x'')\big((P(x',y) \to Q(x,z)) \wedge (R(x'',y') \vee Q(x,y'))\big)$$

Toto je prenexní tvar

Tohle si představuju. Svědek $(\exists y')$ může být jiný pro různé volby volných proměnných.

Generální uzávěr

$(\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x)$

$(\forall x)(\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x))$ OK

$(\forall x)(\alpha(x) \wedge \beta(x))$ NOK

$(\forall x)(\forall x')(\alpha(x) \wedge \beta(x'))$ OK

Skolemizace

$$y' = f(z,x) \;\Big|\; \forall z \forall x \forall y \forall x' \forall x'' \big((P(x',y) \to Q(x,z)) \wedge (R(x'', f(z,x)) \vee Q(x, f(z,x)))\big)$$

(b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$

$$\big((\exists x)(R(x,y)) \to (\forall y)(P(x,y))\big) \wedge \big((\forall y)(P(x,y)) \to (\exists x)(R(x,y))\big)$$

$$\big(\neg(\exists x')(R(x',y)) \vee (\forall y')(P(x,y'))\big) \wedge \big(\neg(\forall y'')(P(x,y'')) \vee (\exists x'')(R(x'',y))\big)$$

volné

Prenexní tvar

$$\forall x \forall y (\forall x')(\forall y')(\exists y'')(\exists x'')\big((\neg R(x',y) \vee P(x,y')) \wedge (\neg P(x,y'') \vee R(x'',y))\big).$$

Generální uzávěr

$y'' := f(x,y,x',y')$

$x'' := g(x,y,x',y')$

$$\forall x \forall y \forall x' \forall y' \big((\neg R(x',y) \vee P(x,y')) \wedge (\neg P(x, f(x,y,x',y')) \vee R(g(x,y,x',y'), y))\big)$$

Skolemizace

6. Nechť T' je rozšíření teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ jazyka $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ pomocí axiomů

$$-x = y \quad \leftrightarrow \quad x + y = 0$$
$$x < y \quad \leftrightarrow \quad x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y)$$

-> Musím použít axiomy z T teorie

Nalezněte formule původního jazyka L ekvivalentní v T' následujícím formulím.

(a) $x + (-x) = 0$

(b) $x + (-y) < x$

(c) $-(x + y) < -x$

$(\exists z)(x + z = 0 \wedge x + z = 0)$

$-x = z$

9. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.

(a) $L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$, kde P, Q jsou unární resp. binární relační, f je unární funkční, a, b jsou konstantní symboly.

(b) $L = \langle P, f, g, a \rangle$, kde P je binární relační, f, g jsou unární funkční, a je konstantní.

-> Univerzum zahrne všechny termy

Herbrandovo univerzum:

$a, f(a), f(f(a)) \ldots \quad f^n(a)$

$b, \ldots \quad \ldots \quad f^n(b)$

$P(a), P(b), P(f(a)), \ldots$

$Q(\ , \ )$ -> všechny sh. součin