Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 12

18. prosince 2019

1. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ má mezi axiomy jediný axiom φ, který není otevřený:

$$x \neq 0 \ \rightarrow \ (\exists y)(x \cdot y = 1).$$

Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models \ (x \neq 0 \ \wedge \ x \cdot y = 1 \ \wedge \ x \cdot z = 1) \ \rightarrow \ y = z$.

   (a) Nalezněte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f.

   (b) Nechť T' je teorie vzniklá z T nahrazením φ za φ_S. Je $T' \models \varphi$?

   (c) Lze každý model teorie T *jednoznačně* expandovat na model teorie T'?

2. (předchozí DÚ) Nechť T je předchozí teorie. Označme ψ formuli $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

   (a) Platí v T podmínky existence a jednoznačnosti pro formuli $\psi(x, y)$ a proměnnou y?

   (b) Sestrojte extenzi T^* teorie T o definovaný symbol f formulí ψ.

   (c) Je T^* ekvivalentní teorii T' z přechozího příkladu?

   (d) K následující formuli nalezněte v T^* ekvivalentní formuli původního jazyka L.

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

3. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.

   (a) $L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$, kde P, Q jsou unární resp. binární relační, f je unární funkční, a, b jsou konstantní symboly.

   (b) $L = \langle P, f, g, a \rangle$, kde P je binární relační, f, g jsou unární funkční, a je konstantní.

4. Sestrojte Herbrandův model pro následující teorie anebo nalezněte nejsplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů. Předpokládejte, že jazyk obsahuje konst. symboly a, b.

   (a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$

   (b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$

   (c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$

   (d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$

5. Převeďte následující formule na ekvisplnitelné formule v množinové reprezentaci.

   (a) $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

   (b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

   (c) $\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$

   (d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow R(x, y))$

6. Pomocí unifikačního algoritmu nalezněte nejobecnější unifikace následujících množin výrazů nebo ukažte, že nejsou unifikovatelné.

   (a) $\{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$

   (b) $\{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$

   (c) $\{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$

   (d) $\{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$

7. Nalezněte (všechny) rezolventy následujících dvojic klauzulí.

   (a) $\{P(x, y), P(y, z)\}$, $\{\neg P(u, f(u))\}$

(b) $\{P(x,x), \neg R(x, f(x))\}$, $\{R(x,y), Q(y,z)\}$

(c) $\{P(x,y), \neg P(x,x), Q(x, f(x), z)\}$, $\{\neg Q(f(x), x, z), P(x,z)\}$

8. Ukažte, že následující množina klauzulí je rezolucí zamítnutelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého rezolučního kroku napište použitou substituci a označte rezolvované literály.

   (a) $\{P(a,x,f(y)), P(a,z,f(h(b))), \neg Q(y,z)\}$

   (b) $\{\neg Q(h(b),w), H(w,a)\}$

   (c) $\{\neg P(a,w,f(h(b))), H(x,a)\}$

   (d) $\{P(a,u,f(h(u))), H(u,a), Q(h(b),b)\}$

   (e) $\{\neg H(v,a)\}$

9. Nalezněte (konečnou) nesplnitelnou konjunkci základních instancí klauzulí z předchozího příkladu.

10. Víme, že

    (a) Pokud je cihla na jiné cihle, tak není na zemi.

    (b) Každá cihla je buď na zemi nebo na jiné cihle.

    (c) Žádná cihla není na cihle, která je na další cihle.

    Vyjádřete to v predikátové logice a rezoluční metodou dokažte, že když je cihla na jiné cihle, ta spodní je na zemi.

11. Víme, že

    (a) Každý holič holí každého, kdo se neholí sám.

    (b) Žádný holič neholí někoho, kdo se holí sám.

    Vyjádřete to v predikátové logice a rezoluční metodou dokažte, že žádný holič neexistuje.

Poznámka

DÚ není zadán. Druhý test se bude psát na posledním cvičení 8.1.

6. Pomocí unifikačního algoritmu nalezněte nejobecnější unifikace následujících množin výrazů nebo ukažte, že nejsou unifikovatelné.

(a) $\{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
(b) $\{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
(c) $\{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
(d) $\{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$

a)

1) $\{x/f(y)\} \to \{P(f(y), g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$

2) $\{y/f(z)\} \to \{\underline{P(f(f(z)), g(f(z)), f(a))}, \underline{P(f(f(z)), g(f(z)), z)}\}$

3) $\{z/f(a)\} \to \{P(f(f(f(a))), g(f(f(a))), f(a))\}$

nalezli jsme tedy, že formule jsou po unifikaci stejné

b) $\{x/a\}, \{y/a\} \to \{P(a, f(a), g(a)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(a, f(a), g(a))\}$.

není jak dál unifikovat

7. Nalezněte (všechny) rezolventy následujících dvojic klauzulí.

(a) $\{P(x, y), P(y, z)\}$, $\{\neg P(u, f(u))\}$

1) $\sigma^1 = \{x/u\}, \{y/f(u)\} \to \{P(u, f(u)), P(f(u), z)\}, \{\neg P(u, f(u))\}$

$\{P(f(u), z)\}\ \sigma^1$

2) $\sigma^2 = \{y/u\}, \{z/f(u)\} \to \{P(x, u), P(u, f(u))\}, \{\neg P(u, f(u))\}$

$\{P(x, u)\}\ \sigma^2$

To jsou všechny rezolventy.