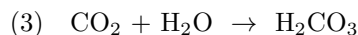
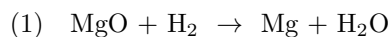


Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 6

6. listopadu 2019

1. (předchozí DÚ) Předpokládejme, že máme k dispozici MgO , H_2 , O_2 , C a lze provést reakce:



- (a) Reprezentujte naše možnosti výrokem a převed'te ho do množinové reprezentace.
 (b) Pomocí LI-rezoluce dokažte, že můžeme získat H_2CO_3 .
2. Dokažte rezolucí, že v teorii $T = \{\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$ platí s , tj. $T \models s$.
3. V Hilbertově kalkulu dokažte pro libovolné formule φ, ψ, χ následující vztahy.

- (a) $\vdash_H \varphi \rightarrow \varphi$
 (b) $T \vdash_H \varphi \rightarrow \chi$ pro $T = \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\}$
 (c) $T \vdash_H \psi \rightarrow \chi$ pro $T = \{\varphi, \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\}$

4. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převed'te na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.

- (a) $(\exists x)(\forall y)P(y, z) \vee (y = 0)$ *Volný: z, Vázaní: y*
 (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$ *vázaný, volný, žádný výsledek*
 (c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$

5. Nechť φ je formule $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které termy jsou substituovatelné do φ za její proměnné?

- (a) term z za proměnnou x , term y za proměnnou x , *substituce pouze do volných proměnných*
 (b) term z za proměnnou y , term $2 * y$ za proměnnou y ,
 (c) term x za proměnnou z , term y za proměnnou z ,

6. Jsou následující formule variantou formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?

- (a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$ *(x/z) x poslední „z“ bylo původně vázané*
 (b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$ *x „y“ bylo volné, nyní je vázané*
 (c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$ *✓ vázané a volné byly dohromady*

7. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, \triangleright^A)$ pro jazyk s jediným binárním relačním symbolem $\triangleright$, kde $\triangleright^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$. Určete, zda jsou následující formule v pravdivé v $\mathcal{A}$.

- (a) $x \triangleright y$ *x* *záměna by (x/y) x > y, my ale máme zde všechny dvojice*
 (b) $(\exists x)(\forall y)(y \triangleright x)$ *x* *(x/y) y > a, (x/y) y > b, (x/y) y > c, (x/y) y > d*
 (c) $(\exists x)(\forall y)((y \triangleright x) \rightarrow (x \triangleright y))$
 (d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \triangleright z) \wedge (z \triangleright y))$
 (e) $(\forall x)(\exists y)((x \triangleright z) \vee (z \triangleright y))$

8. Pro každou formuli φ z předchozího cvičení nalezněte strukturu $\mathcal{B}$ (pokud existuje) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$, právě když $\mathcal{A} \models \varphi$.

9. Dokažte (sémanticky z definic) anebo nalezněte protipříklad, že pro každou formuli φ platí

- (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$ *✓ všechny modely (tj. „platí“ pro všechny domény) ⊨ všechny chodové*

- (b) $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$ *x je volné v φ*

- (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$ *φ nepřítíže ✓ F → ? = T*

- (d) $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$ *φ platíže*

platí pro všechny

všech možných hodnotách

Pozn.

Příští týden 13.11. se bude psát první test. Domácí úkol nebyl zadán.

Volné proměnné nelze přejmenovávat!

Je rozdíl mezi přejmenováním a substitucí!

Substituce:

$\varphi(x)(x/t)$ lze položit:

x je volné

Položit t nemá význam, výsledky

tam, kde bylo x .

Tedy aby na substitučních místech

zůstane t volné.

Přejmenování:

Nesmíme přejmenovat na již existující proměnnou

Musí zůstat semantický význam výsledků

$(\forall x) \varphi(x) \rightarrow (\exists x) \varphi(x)$ Neplatí, pokud je množin modelů x prázdná.

$$A \models \varphi \rightarrow A \models \neg \varphi$$

Přejmenování: $\rightarrow$ všechno volné

$$\frac{\forall(x) \varphi(x)}{\forall(y) (\varphi(x)(x/y))}$$

t by jsou nyní x volné, a to dává

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 7

13. listopadu 2019

1. Test 1
2. Dokažte (sémanticky z definic) anebo nalezněte protipříklad, že pro každou formuli φ platí
 - (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
 - (b) $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$
 - (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
 - (d) $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$
3. Rozhodněte, zda jsou následující sentence (logicky) pravdivé / lživé / nezávislé.
 - (a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$
 - (b) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$
 - (c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow ((\forall x)(P(x) \vee (\forall x)Q(x)))$
 - (d) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x))$
 - (e) $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$
4. Zdůvodněte (sémanticky) následující vztahy. Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ , sentenci ψ ,
 - (a) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$
 - (b) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$
 - (c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$
 - (d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$

Platí uvedené vztahy i pro formuli ψ , ve které x je volná proměnná? A pro formuli ψ , ve které x není volná?

5. Uvažme teorii T (*teorie grup*) nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovnostmi, kde $+$ je binární funkční symbol, $-$ je unární funkční symbol, 0 konstantní symbol, s axiomy

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x + y) + z \\0 + x &= x = x + 0 \\x + (-x) &= 0 = (-x) + x\end{aligned}$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T .

- (a) $x + y = y + x$
- (b) $x + y = x \rightarrow y = 0$
- (c) $x + y = 0 \rightarrow y = -x$
- (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

Domácí úkol

Libovolné tři příklady z 3.(b)-(e), včetně zdůvodnění (1 bod celkem).