

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 10

4. prosince 2019

1. (předchozí DÚ) Nechtě $L = \langle F \rangle$ je jazyk s rovností, kde F je binární funkční symbol. Napište formule definující (bez parametrů) v následujících strukturách následující množiny:
 - (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, kde $\cdot$ je standardní násobení reálných čísel,
 - (b) množinu $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,
 - (c) množinu všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$.

2. Víme, že

- (a) všichni vinni lžou,
- (b) alespoň jeden obviněný je svědek,
- (c) svědci nelžou.

Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.

3. Označme $L(x, y)$ predikát “*existuje let z x do y* ” a $S(x, y)$ predikát “*existuje spojení z x do y* ”. Víme, že

- (a) z Prahy se dá letět do Horní Lhoty, Londýna a New Yorku, z New Yorku do Paříže,
- (b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- (c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
- (d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

Tablo metodou dokažte, že z Horní Lhoty existuje spojení do Paříže.

4. Nechtě φ, ψ jsou sentence nebo jsou ve volné proměnné x , značíme $\varphi(x), \psi(x)$. Nalezněte tablo důkazy následujících formulí.

- (a) $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$,
- (b) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$,
- (c) $(\varphi \vee (\forall x)\psi(x)) \rightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi(x))$, kde x není volná ve φ ,
- (d) $(\varphi \wedge (\exists x)\psi(x)) \rightarrow (\exists x)(\varphi \wedge \psi(x))$, kde x není volná ve φ ,
- (e) $(\exists x)(\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ ,
- (f) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi(x)) \rightarrow (\varphi \wedge (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ ,
- (g) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$,
- (h) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$,
- (i) $(\exists x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$, kde x není volná ve ψ ,
- (j) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$, kde x není volná ve ψ .

5. Nechtě φ, ψ jsou ve volných proměnných x, y, z a w je proměnná nevyskytující se ve φ, ψ . Nalezněte tablo důkazy (uzávěrů) následujících formulí.

- (a) $(\forall x)(\exists y)\neg(\forall z)\varphi \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)\neg\varphi$,
- (b) $(\exists x)(\forall y)((\forall z)\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\forall w)(\varphi(z/w) \vee \psi)$,
- (c) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \vee (\exists z)\psi) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists w)(\varphi \vee \psi(z/w))$,
- (d) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \rightarrow (\forall z)\psi) \rightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall w)(\varphi \rightarrow \psi(z/w))$.

6. Necht' T^* je teorie s axiomu rovnosti. Tablo metodou doka'zte, že

$$(a) \quad T^* \models x = y \rightarrow y = x \quad (\text{symetrie} =)$$

$$(b) \quad T^* \models (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z \quad (\text{tranzitivita} =)$$

Nápověda: pro (a) v axiomu rovnosti (iii) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$,
pro (b) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

7. Necht' L je jazyk obsahující binární relační symbol E a konstantní symboly a, b a T je teorie, jež má za model každý (neorientovaný) graf, v němž mezi vrcholy a a b existuje konečná cesta. Pomocí věty o kompaktnosti doka'zte, že T má i model, ve kterém mezi vrcholy a, b neexistuje konečná cesta.

8. Necht' L je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomu pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti doka'zte, že T má model $\mathcal{A}$ s nekonečným klesajícím řetězcem, tj. v $\mathcal{A}$ existují prvky c_i pro $i \in \mathbb{N}$ s

$$\dots < c_{n+1} < c_n < \dots < c_0.$$

Domácí úkol

Příklad 6. (1 b).

→ musí být souhrn pro tablo

$$(\exists x)(\forall y) P(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x) P(x, y)$$

$T \exists$ - svědek

$$F(\exists x)(\forall y) P(x, y) \quad \checkmark$$

$T \forall$ - všichni } můžu dosadit
 $F \exists$ - všichni } lib. term

$\downarrow$

$$T(\exists x)(\forall y) P(x, y) \quad \checkmark$$

$$F(\forall y)(\exists x) P(x, y) \quad \checkmark$$

$\downarrow$

$$T(\forall y) P(a_x, y) \quad x/a_x$$

$$F(\exists x) P(x, b_y) \quad y/b_y$$

$\downarrow$

$$T(a_x, a_x) \quad \text{tohle můžu ale nepamátat}$$

$$\boxed{T}(a_x, b_y)$$

$$\boxed{F}(a_x, b_y)$$

$\downarrow$
 $\otimes$

2. Víme, že

- (a) všichni vinni lžou,
- (b) alespoň jeden obviněný je svědek,
- (c) svědci nelžou.

Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.

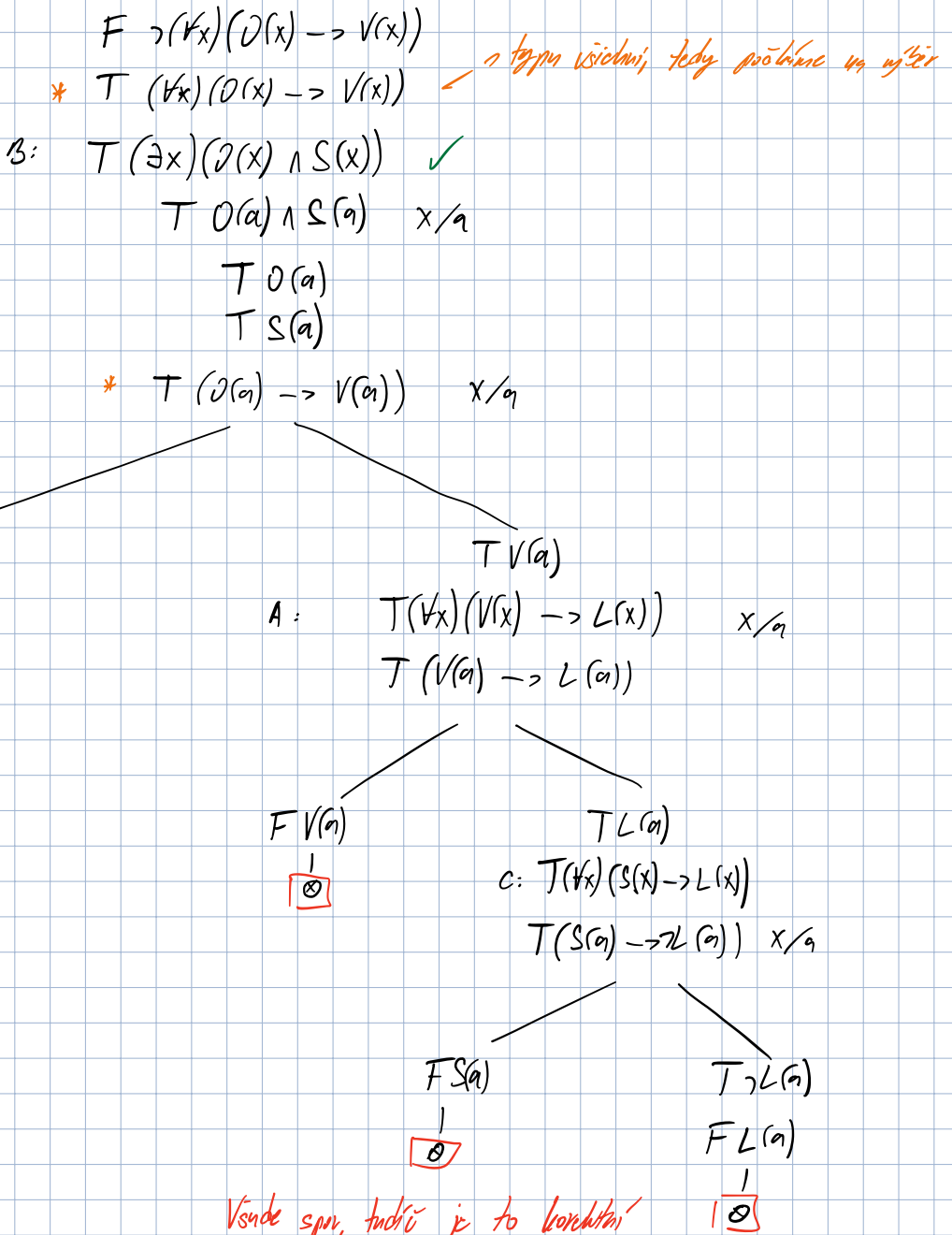
- a) $(\forall x)(V(x) \rightarrow L(x))$
- b) $(\exists x)(O(x) \wedge S(x))$
- c) $(\forall x)(S(x) \rightarrow \neg L(x))$

Potřebujeme jazyk:

- $x \dots$ osoba
- $L(x) \dots$ lže
- $V(x) \dots$ je vinný
- $S(x) \dots$ je svědek
- $O(x) \dots$ obviněný

Trzení: $T^2 \neg(\forall x)(O(x) \rightarrow V(x))$

$\{A, B, C\} \vdash_T T^2 \dots \dots \{A, B, C, \neg T^2\} \not\vdash_T \perp$



Vsude spr, tudíž je to korektní
tablo důkazy a $\{A, B, C\} \vdash_T T^2$

Representace bin. struktury:

$\varnothing$

$S(L, x, r)$

$$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \rightarrow f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$

$$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \rightarrow (R(x_1, y_1) \Leftrightarrow R(x_2, y_2))$$

⑥

$$(a) T^* \models x = y \rightarrow y = x$$

normost: $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \rightarrow (x_1 = y_1 \rightarrow x_2 = y_2)$

tady je $(\forall x)(\forall y)$

$$\{x_1/x_1, x_2/y_1, y_1/x_1, y_2/x_1\} \rightarrow \text{tady můžeme explicitně dosadit}$$

$$x = y \wedge x = x \rightarrow (x = x \rightarrow y = x)$$

4b

$$(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x),$$

$$F(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$$