Tablo-metoda

Tablo-důkaz: sporné tablo s F kořenem (nebyl nalezen protipříklad)

Tablo-zamítnutí: sporné tablo s T kořenem

Formule budou sentence --> uzavřené formule bez volných proměnných

↳ pokud nejsou, udělej uzávěr

$$F(\forall x)(\varphi(x) \land \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \land (\forall x)\psi(x))$$

- $T(\forall x)(\varphi(x) \land \psi(x))$, $F((\forall x)\varphi(x) \land (\forall x)\psi(x))$
  - $F(\forall x)\varphi(x)$ | $F\varphi(c)$ | $T\varphi(c) \land \psi(c)$ | $T\varphi(c)$ | $T\psi(c)$ | $\otimes$
  - $F(\forall x)\psi(x)$ | $F\psi(c)$ | $T\varphi(c) \land \psi(c)$ | $T\varphi(c)$ | $T\psi(c)$ | $\otimes$
- $F(\forall x)(\varphi(x) \land \psi(x))$, $T((\forall x)\varphi(x) \land (\forall x)\psi(x))$
  - $F\varphi(x/c)$ | $T(\forall x)\varphi(x)$, $T(\forall x)\psi(x)$ | $T\varphi(c)$ | $\otimes$
  - $F\psi(x/c)$ | $T(\forall x)\varphi(x)$, $T(\forall x)\psi(x)$ | $T\psi(c)$ | $\otimes$

$$T \vdash f$$

Prenexní tvar

- všechny kvantifikátory musí být před formulí

  ↳ shody se tedy musí ekvivalentně přejmenovat

Musí být zachováno pořadí kvantifikátorů daných formulí: $(\forall x)((\exists y)\varphi \lor \psi) \sim (\forall x)(\exists y)(\varphi \lor \psi)$

$(\exists y)(\forall x)(\varphi \lor \psi)$ nelze!

Základní pravidla pro vytýkání jsou:

$$\neg(Qx)\varphi \sim (\bar{Q}x)\neg\varphi$$
$$((Qx)\varphi \land \psi) \sim (Qx)(\varphi \land \psi)$$
$$((Qx)\varphi \lor \psi) \sim (Qx)(\varphi \lor \psi)$$
$$((Qx)\varphi \rightarrow \psi) \sim (\bar{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi)$$
$$(\varphi \rightarrow (Qx)\psi) \sim (Qx)(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$(\forall y)((\exists x) P(x,y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x) R(x,y) \vee Q(x,y))$$

$$(\forall y)((\exists x') P(x',y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y')((\forall x'') R(x'',y') \vee Q(x,y'))$$

$$(\forall y)(\forall x')(P(x',y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y')(\forall x'')(R(x'',y') \vee Q(x,y'))$$

→ generální uzávěr

$$\forall x \forall z\, (\exists y')(\forall y)(\forall x')(\forall x'')((P(x',y) \to Q(y,z)) \wedge (R(x'',y') \vee Q(x,y')))$$

Skolemizace

Převedení všech existenčních kvantifikátorů na funkci předchozích (myšleno v prenexním tvaru) všeobecných kvantifikátorů.

Pozor, platí to i na kvantifikátory generálního uzávěru

$$y' = f(x,z) \;\Big|\; \forall x \forall z \forall y \forall x' \forall x'' ((P(x',y) \to Q(y,z)) \wedge (R(x'', f(x,z)) \vee Q(x, f(x,z)))).$$

Rezoluční metoda

Vyžaduje skolemizaci (tedy i prenexní tvar), rezoluční rozhodnutí formule φ je $\vdash_R \neg\varphi$.

$$\varphi: (\exists y)(P(x,y) \wedge R(y)) \to ((\exists y) P(x,y) \wedge (\exists y) R(y))$$

$$\neg\varphi: (\exists y)(P(x,y) \wedge R(y)) \wedge \neg((\exists y) P(x,y) \wedge (\exists y) R(y))$$

$$(\exists y')(P(x,y') \wedge R(y')) \wedge ((\forall y'')\neg P(x,y'') \vee (\forall y''')\neg R(y'''))$$

$$(\forall x)(\exists y')(\forall y'')(\forall y''')\; P(x,y') \wedge R(y') \wedge (\neg P(x,y'') \vee \neg R(y''')))$$ – prenexní tvar

$$y' = f(x) \;\Big|\; \forall x \forall y'' \forall y'''\; P(x,f(x)) \wedge R(f(x)) \wedge (\neg P(x,y'') \vee \neg R(y''))$$ → skolemova varianta

$$\{P(x,f(x))\},\ \{R(f(x))\},\ \{\neg P(x,y''), \neg R(y'')\}$$

$$\{\neg P(x,f(x))\} \quad - \{y''/f(x)\}$$

$$\square$$

Dokázáno!

$$((Qx)\varphi \to \psi) \sim (\bar{Q}x)(\varphi \to \psi)$$

$$\neg(Qx)\varphi \vee \psi \sim (\bar{Q}x)\neg\varphi \vee \psi \sim (\bar{Q}x)(\varphi \to \psi)$$

$F\ (\exists x)(P(x) \to R(x))$

$T\ (\exists x)(P(x) \to Q(x))$

$T\ (\exists x)(\neg R(x) \to \neg Q(x))$

- $F\,P(c)$
  - $F(\exists x)(P(x) \to R(x))$
  - $T\,P(c)$
  - $F\,R(c)$
  - $\otimes$
- $T\,Q(c)$
  - $F\neg R(d)$
    - $T\,R(d)$
    - $F(\exists x)(P(x) \to R(x))$
    - $F(P(d) \to R(d))$
    - $T\,P(d)$
    - $F\,R(d)$
    - $\otimes$
  - $T\neg Q(d)$
    - $F\,Q(d)$
    - $F(\exists x)(P(x) \to R(x))$
    - $F(P(d) \to R(d))$
    - $T\,P(d)$
    - $F\,R(d)$

Tato větev neobsahuje spor, čili se nejedná o tablo-důkaz

$F\big((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))\big)$

- $T\big((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))\big)$
  $F\big((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)\big)$
  - $F(\forall x)\varphi(x)$
    $F\varphi(x/c)$
    $T\varphi(x/c) \wedge \psi(x/c)$
    $T\varphi(c)$
    $T\psi(c)$
    $\otimes$
  - $F(\forall x)\psi(x)$
    $F\psi(x/c)$
    $T\varphi(x/c) \wedge \psi(x/c)$
    $T\varphi(c)$
    $T\psi(c)$
    $\otimes$
- $F\big((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))\big)$
  $T\big((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)\big)$
  $F\varphi(x/c) \wedge \psi(x/c)$
  - $F\varphi(c)$
    $T\big((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)\big)$
    $T(\forall x)\varphi(x)$
    $T(\forall x)\psi(x)$
    $T\varphi(c)$
    $\otimes$
  - $F\psi(c)$
    $T\big((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)\big)$
    $T(\forall x)\varphi(x)$
    $T(\forall x)\psi(x)$
    $T\psi(c)$
    $\otimes$

Rezoluce:

Pokud mám teorii a chci ověřit $T \models \varphi$, tak zkusím přidat $\neg\varphi$ do teorie. Pokud to tablem zamítnu, tak neexistuje žádný model, ve kterém by $\neg\varphi$ platilo. Tedy pak v T platí φ.

Tzn. jenom u formule k ověření přidám negaci, u ostatních to nechám stejné.

$$T = \{\neg P(x,x),\ P(x,y) \to P(y,x),\ P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)\}$$

$$T \models (\exists x)\neg P(x,f(x)) \qquad \neg(\exists x)\neg P(x,f(x)) \sim \cancel{\neg\neg}(\forall x)P(x,f(x))$$

$$\{P(x'',f(x''))\},\ \{\neg P(x',y'),\ P(y',x')\},\ \{\neg P(x'',y''),\ \neg P(y'',z),\ P(x'',z)\},\ \{P(x''',f(x'''))\}$$

$x''/x',\ y'/f(x'')$

$x'''/x'',\ y''/f(x''')$

$$\{P(f(x'),x')\} \qquad \{\neg P(f(x''),z),\ P(x'',z)\}$$

$z/x'',\ x'/x''$

$$\{P(x'',x'')\} \qquad \{\neg P(x,x)\}$$

x''/x

$$\square$$

Rezoluční zamítnutí!

$$\{P(x),\ Q(x,y),\ Q(x,f(z))\},\ \{\neg P(u),\ \neg Q(f(u),u)\}$$

$$\varphi: (\exists y)(P(x,y) \wedge R(y)) \to ((\exists y)P(x,y) \wedge (\exists y)R(y))$$

$$\neg\varphi: (\exists y)(P(x,y) \wedge R(y)) \wedge (\neg(\exists y')P(x,y') \vee \neg(\exists y')R(y'))$$

$$(\exists y)(P(x,y) \wedge R(y)) \wedge ((\forall y')\neg P(x,y') \vee (\forall y'')\neg R(y''))$$

$$\forall x \exists y \forall y' \forall y'' (P(x,y) \wedge R(y) \wedge (\neg P(x,y') \vee \neg R(y'')))$$

$$y = f(x) \mid \forall x \forall y' \forall y'' (P(x,f(x)) \wedge R(f(x)) \wedge (\neg P(x,y') \vee \neg R(y'')))$$

$$\{P(x,f(x))\}, \{R(f(x))\}, \{\neg P(x,y'), \neg R(y'')\}$$

$$y''/f(x)$$

$$\{\neg P(x,y')\}$$

$$y'/f(x)$$

$$\square$$

$$\varphi(x,u,v) \quad (\exists y)(E(u,y) \wedge E(y,x) \wedge \neg(u=y) \wedge \neg(y=x)) \wedge (E(v,x) \wedge \neg(v=x))$$

Množina všech vrcholů: $\varphi^{T,u,v}(x,y,z) = \{a \in T \mid T \models \varphi[e(x/a, y/u, z/v)]\}$

$$\varphi(x,u,v) := \ldots$$

$$\varphi^{G,u,v}(x,y,z) := \{a \in G \mid G \models \varphi[e(x/a, y/u, z/v)]\}$$

$$\{P(x), Q(x,y), Q(x,f(z))\}, \{\neg P(u), \neg Q(f(u), u)\}$$

$$Q(x, f(v)), \quad Q(x, f(v)) \qquad \neg Q(f(f(v)), f(v))$$

$$\{P(f(f(v))), Q(f(f(v)), f(v)), Q(f(f(v)), f(v))\}, \{\neg P(f(v)), \neg Q(f(f(v)), f(v))\}$$

$$\{P(f(f(v))), \neg P(f(v))\}$$