2. Zdůvodněte (sémanticky) následující vztahy. Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, sentenci ψ,

(a) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$
(b) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$
(c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$
(d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$

Sentence obsahuje pouze vázané proměnné.
Zároveň platí $A \models \varphi \Leftrightarrow A \models (\forall x)\varphi$

a) $A \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Rightarrow A \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$ ✓ Tedy:

$$A \models (\forall y)(\psi \to (\exists x)\varphi) \Rightarrow A \models (\exists x)(\psi \to \varphi).$$

Pak vzhledně existuje výběr x, y takový, že $x = y$, tudíž platí i pravá strana.

$A \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftarrow A \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$ ✓

Existuje výběr proměnné pro kterou $T(\psi \to \varphi)$, tedy explicitně existuje proměnná pro splnění důsledku implikace. Tudíž pro jakékoli ohodnocení implikačního předpokladu bude implikace platit.

b) $A \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Rightarrow A \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$ ✓

$$A \models (\forall x)(\psi \to (\forall y)\varphi) \Rightarrow A \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$$

Implikační důsledek platí pro všechna ohodnocení proměnných z domény.
Tudíž lze přímo simplifikovat na $\forall(x)(\psi \to \varphi)$, jelikož formule φ stále splněna a ohodnocení výrazu záleží jen na ohodnocení ψ předpokladu.
Tudíž přímo dostáváme pravou stranu.

$A \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftarrow A \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$ ✓

Jakmile implikace je platná pro všechna ohodnocení, je její ohodnocení závislé na ohodnocení důsledku pouze v případě platného předpokladu.
V ostatních případech je platnost implikace závislá na předpokladu, tedy celkově je pak implikace platná pro všechna ohodnocení důsledku.
Tedy implikace platí.

c) $A \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Rightarrow A \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$ ✓

$A \models (\forall y)((\exists x)\varphi \to \psi) \Rightarrow A \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$

Pro právě jednu hodnotu předpokladu je splněna implikace pro všechna ohodnocení důsledku.
Tudíž musí být implikace platná i pro všechna ohodnocení předpokladu,
jelikož pokud bude předpoklad pravdivý, je i důsledek, tudíž celá implikace.
Jakmile není předpoklad pravdivý, je pravdivá implikace automaticky.

$A \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftarrow A \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$ ✓

$A \models (\forall y)((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftarrow A \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$

Pokud je implikace pravdivá pro všechna ohodnocení, explicitně platí, že musí
existovat ohodnocení předpokladu, které vychází z výběru prvku takového, aby $x = y$.
Tedy $(\forall y)$ mohu vybrat $(\exists x)$, aby $x = y$, tudíž bude implikace splněna vzhledem k předpokladu.

---

d) $A \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Rightarrow A \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$ ✓

$A \models (\forall y)((\forall x)\varphi \to \psi) \Rightarrow A \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$

Pokud je implikace (s platným předpokladem) pravdivá, musí být pravdivý i důsledek.
To explicitně dovoluje z výběru $\forall x, y$ vybrat takové $x = y$, že bude splněna
pravá strana.

$A \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftarrow A \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$ ✓

$A \models (\forall y)((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftarrow A \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$

Pokud je splněn důsledek implikace, platí triviálně i levá strana.
Pokud však důsledek neplatí, tedy $F(\psi)$, pak musí být i $F(\varphi)$. Tudíž
vlevo ve výběru $(\forall x)\varphi$ to vždy neplatí a tedy existují takové výběry x, y, že
implikace je automaticky splněna.