

Výroková a predikátová logika - X

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2020/21

Ekvisplnitelnost

*Ukážeme, že problém splnitelnosti lze **redukovat** na otevřené teorie.*

- Teorie T , T' jsou **ekvisplnitelné**, jestliže T má model $\Leftrightarrow T'$ má model.
- Formule φ je v **prenexním (normálním) tvaru (PNF)**, má-li tvar

$$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \varphi',$$

kde Q_i značí $\forall$ nebo $\exists$, proměnné $x_1, \dots, x_n$ jsou navzájem různé a φ' je otevřená formule, zvaná **otevřené jádro**. $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n)$ je tzv. **prefix**.

- Speciálně, jsou-li všechny kvantifikátory $\forall$, je φ **univerzální** formule.

K teorii T nalezneme ekvisplnitelnou otevřenou teorii následujícím postupem.

- (1) Axiomy teorie T nahradíme za ekvivalentní formule v **prenexním** tvaru.
- (2) Pomocí nových funkčních symbolů je převedeme na univerzální formule, tzv. **Skolemovy varianty**, čímž dostaneme ekvisplnitelnou teorii.
- (3) Jejich **otevřená jádra** budou tvořit hledanou teorii.

Vytýkání kvantifikátorů

Nechť Q značí kvantifikátor $\forall$ nebo $\exists$ a $\overline{Q}$ značí opačný kvantifikátor.

Pro každé formule φ, ψ takové, že x **není volná** ve formuli ψ ,

$$\models \neg(Qx)\varphi \leftrightarrow (\overline{Q}x)\neg\varphi$$

$$\models ((Qx)\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (Qx)(\varphi \wedge \psi)$$

$$\models ((Qx)\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (Qx)(\varphi \vee \psi)$$

$$\models ((Qx)\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\overline{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\models (\psi \rightarrow (Qx)\varphi) \leftrightarrow (Qx)(\psi \rightarrow \varphi)$$

Uvedené ekvivalence lze ověřit sémanticky nebo dokázat tablo metodou (přes *generální uzávěr*, *není-li to sentence*).

Poznámka Předpoklad, že x není volná ve formuli ψ je v každé ekvivalenci (kromě té první) nutný pro nějaký kvantifikátor Q . Např.

$$\not\models ((\exists x)P(x) \wedge P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge P(x))$$

Převod na prenexní tvar

Tvrzení *Nechť φ' je formule vzniklá z formule φ nahrazením některých výskytů podformule ψ za formuli ψ' . Jestliže $T \models \psi \leftrightarrow \psi'$, pak $T \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule φ . $\square$

Tvrzení *Ke každé formuli φ existuje ekvivalentní formule φ' v **prenexním normálním tvaru**, tj. $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.*

Důkaz Indukcí dle struktury φ pomocí **vytýkání kvantifikátorů**, náhradou podformulí za jejich **varianty** a využitím předchozího tvrzení o ekvivalenci. $\square$

Např.

$$\begin{aligned}
 ((\forall z)P(x, z) \wedge P(y, z)) &\rightarrow \neg(\exists x)P(x, y) \\
 ((\forall u)P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow (\forall x)\neg P(x, y) \\
 (\forall u)(P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow (\forall v)\neg P(v, y) \\
 (\exists u)((P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow (\forall v)\neg P(v, y)) \\
 (\exists u)(\forall v)((P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow \neg P(v, y))
 \end{aligned}$$

Skolemova varianta

Nechť φ je **sentence** jazyka L v **prenexním normálním tvaru**, $y_1, \dots, y_n$ jsou **existenčně** kvantifikované proměnné ve φ (v tomto pořadí) a pro každé $i \leq n$ nechť $x_1, \dots, x_{n_i}$ jsou **univerzálně** kvantifikované proměnné před y_i . Označme L' rozšíření L o nové n_i -ární funkční symboly f_i pro každé $i \leq n$.

Nechť φ_S je formule jazyka L' , jež vznikne z formule φ odstraněním $(\exists y_i)$ z jejího prefixu a nahrazením každého výskytu proměnné y_i za term $f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$. Pak formule φ_S se nazývá **Skolemova varianta** formule φ .

Např. pro formuli φ

$$(\exists y_1)(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y_2)(\forall x_3)R(y_1, x_1, x_2, y_2, x_3)$$

je následující formule φ_S její Skolemovou variantou

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)R(f_1, x_1, x_2, f_2(x_1, x_2), x_3),$$

kde f_1 je nový konstantní symbol a f_2 je nový binární funkční symbol.

Vlastnosti Skolemovy varianty

Lemma *Nechť φ je sentence $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(\exists y)\psi$ jazyka L a φ' je sentence $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)\psi(y/f(x_1, \dots, x_n))$, kde f je nový funkční symbol. Pak*

- (1) *redukt $\mathcal{A}$ každého modelu $\mathcal{A}'$ formule φ' na jazyk L je modelem φ ,*
- (2) *každý model $\mathcal{A}$ formule φ lze expandovat na model $\mathcal{A}'$ formule φ' .*

Poznámka *Na rozdíl od extenze o definici funkčního symbolu, expanze v tvrzení (2) tentokrát nemusí být jednoznačná.*

Důkaz (1) Nechť $\mathcal{A}' \models \varphi'$ a $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na jazyk L . Jelikož pro každé ohodnocení e je $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$, kde $a = (f(x_1, \dots, x_n))^{\mathcal{A}'}[e]$, platí $\mathcal{A} \models \varphi$.
 (2) Nechť $\mathcal{A} \models \varphi$. Pak existuje funkce $f^{\mathcal{A}}: A^n \rightarrow A$ taková, že pro každé ohodnocení e platí $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$, kde $a = f^{\mathcal{A}}(e(x_1), \dots, e(x_n))$, a tedy expanze $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ o funkci $f^{\mathcal{A}}$ je modelem φ' . $\square$

Důsledek *Je-li φ' Skolemova varianta formule φ , obě tvrzení (1) a (2) pro φ, φ' rovněž platí. Tedy φ, φ' jsou ekvisplnitelné.*

Skolemova věta

Věta Každá teorie T má *otevřenou konzervativní* extenzi T^* .

Důkaz Lze předpokládat, že T je v uzavřeném tvaru. Nechť L je její jazyk.

- Nahrazením každého axiomu teorie T za ekvivalentní formuli v *prenexním tvaru* získáme ekvivalentní teorii T° .
- Nahrazením každého axiomu teorie T° za jeho *Skolemovu variantu* získáme teorii T' rozšířeného jazyka L' .
- Jelikož je reduct každého modelu teorie T' na jazyk L modelem teorie T , je T' *extenze* T .
- Jelikož i každý model teorie T lze expandovat na model teorie T' , je to extenze *konzervativní*.
- Jelikož každý axiom teorie T' je univerzální sentence, jejich nahrazením za *otevřená jádra* získáme otevřenou teorii T^* ekvivalentní s T' . $\square$

Důsledek Ke každé teorii existuje ekvisplnitelná otevřená teorie.

Redukce nesplnitelnosti na úroveň VL

Je-li otevřená teorie nesplnitelná, lze to “doložit na konkrétních prvcích”.

Např. teorie

$$T = \{P(x, y) \vee R(x, y), \neg P(c, y), \neg R(x, f(x))\}$$

jazyka $L = \langle P, R, f, c \rangle$ nemá model, což lze doložit nesplnitelnou konjunkcí konečně mnoha **instancí** (některých) axiomů teorie T v **konstantních termech**

$$(P(c, f(c)) \vee R(c, f(c))) \wedge \neg P(c, f(c)) \wedge \neg R(c, f(c)),$$

což je lživá formule ve tvaru výroku

$$(p \vee r) \wedge \neg p \wedge \neg r.$$

Instance $\varphi(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$ otevřené formule φ ve volných proměnných $x_1, \dots, x_n$ je **základní (ground) instance**, jsou-li všechny termy $t_1, \dots, t_n$ konstantní. Konstantní termy nazýváme také **základní (ground) termy**.

Herbrandův model

Nechť $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je jazyk s alespoň jedním konstantním symbolem.

(Je-li třeba, do L přidáme nový konstantní symbol.)

- **Herbrandovo univerzum** pro L je množina všech konstantních termů z L .
Např. pro $L = \langle P, f, c \rangle$, kde P je relační, f je binární funkční, c konstantní

$$A = \{c, f(c, c), f(f(c, c), c), f(c, f(c, c)), f(f(c, c), f(c, c)), \dots\}$$
- Struktura $\mathcal{A}$ pro L je **Herbrandova struktura**, je-li doména A Herbrandovo univerzum pro L a pro každý n -ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a $t_1, \dots, t_n \in A$,

$$f^A(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

(včetně $n = 0$, tj. $c^A = c$ pro každý konstantní symbol c).

Poznámka Na rozdíl od **kanonické struktury** nejsou předepsané relace.

Např. $\mathcal{A} = \langle A, P^A, f^A, c^A \rangle$, kde $P^A = \emptyset$, $c^A = c$ a $f^A(c, c) = f(c, c), \dots$

- **Herbrandův model** teorie T je Herbrandova struktura, jež je modelem T .

Herbrandova věta

Věta *Nechť T je otevřená teorie jazyka L bez rovnosti a s alespoň jedním konstantním symbolem. Pak*

- (a) T má Herbrandův model, anebo*
- (b) existuje konečně mnoho **základních instancí** axiomů z T , jejichž konjunkce je nespílitelná, a tedy T nemá model.*

Důkaz Nechť T' je množina všech základních instancí axiomů z T . Uvažme dokončené (např. systematické) tablo τ z T' v jazyce L (bez přidávání nových konstant) s položkou $F \perp$ v kořeni.

- Obsahuje-li tablo τ bezespornou větev V , kanonický model z větve V je Herbrandovým modelem teorie T .
- Jinak je τ sporné, tj. $T' \vdash \perp$. Navíc je konečné, tedy $\perp$ je dokazatelný jen z konečně mnoha formulí T' , tj. jejich konjunkce je nespílitelná. $\square$

Poznámka V případě jazyka L s rovností teorii T rozšíříme na T^* o **axiomy rovnosti** pro L a pokud T^* má Herbrandův model $\mathcal{A}$, **zfaktorizujeme** ho dle $=^A$.

Důsledky Herbrandovy věty

Nechť L je jazyk obsahující alespoň jeden konstantní symbol.

Důsledek Pro každou otevřenou $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ jazyka L je $(\exists x_1) \dots (\exists x_n) \varphi$ pravdivá, právě když existují konstantní termy t_{ij} jazyka L takové, že

$$\varphi(x_1/t_{11}, \dots, x_n/t_{1n}) \vee \dots \vee \varphi(x_1/t_{m1}, \dots, x_n/t_{mn})$$

je (výroková) tautologie.

Důkaz $(\exists x_1) \dots (\exists x_n) \varphi$ je pravdivá $\Leftrightarrow (\forall x_1) \dots (\forall x_n) \neg \varphi$ je nespílitelná $\Leftrightarrow \neg \varphi$ je nespílitelná. Ostatní vyplývá z Herbrandovy věty pro $\neg \varphi$. $\square$

Důsledek Otevřená teorie T jazyka L má model, právě když teorie T' všech základních instancí axiomů z T má model.

Důkaz Má-li T model $\mathcal{A}$, platí v něm každá instance každého axiomu z T , tedy $\mathcal{A}$ je modelem T' . Nemá-li T model, dle H. věty existuje (konečně) formulí z T' , jejichž konjunkce je nespílitelná, tedy T' nemá model. $\square$

Rezoluční metoda v PL - úvod

- **Zamítací** procedura - cílem je ukázat, že daná formule (či teorie) je nespílitelná.
- Předpokládá **otevřené** formule v **CNF** (v množinové reprezentaci).
Literál je (tentokrát) atomická formule nebo její negace.
Klauzule je konečná množina literálů, $\square$ značí **prázdnou klauzuli**.
Formule (v množinové reprezentaci) je množina (i nekonečná) klauzulí.
Poznámka Každou formuli (teorii) umíme převést na ekvispílitelnou otevřenou formuli (teorii) v CNF, tj. na formuli v množinové reprezentaci.
- **Rezoluční pravidlo** je obecnější - umožňuje rezolvovat přes literály, které jsou **unifikovatelné**.
- Rezoluce v PL je založená na **rezoluci ve VL** a **unifikaci**.

Lokální význam proměnných

Proměnné v rámci *klauzule* můžeme přejmenovat.

Nechť φ je (vstupní) otevřená formule v CNF.

- Formule φ je splnitelná, právě když její generální uzávěr φ' je splnitelný.
- Pro každé formule ψ , χ a proměnnou x

$$\models (\forall x)(\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\forall x)\psi \wedge (\forall x)\chi$$

(i když x je volná v ψ a χ zároveň).

- Každou klauzuli ve φ lze tedy nahradit jejím generálním uzávěrem.
- Uzávěry klauzulí lze *variovat* (přejmenovat proměnné).

Např. variovaním druhé klauzule v (1) získáme ekvisplnitelnou formuli (2).

$$(1) \{ \{P(x), Q(x, y)\}, \{\neg P(x), \neg Q(y, x)\} \}$$

$$(2) \{ \{P(x), Q(x, y)\}, \{\neg P(v), \neg Q(u, v)\} \}$$

Přímá redukce do VL

Herbrandova věta umožňuje následující postup. Je ale značně neefektivní.

- Nechť S je (vstupní) formule v množinové reprezentaci.
- Lze předpokládat, že jazyk obsahuje alespoň jeden konstantní symbol.
- Nechť S' je množina všech **základních instancí** klauzulí z S .
- Zavedením prvovýroků pro každou **atomickou sentenci** lze S' převést na (případně nekonečnou) výrokovou formuli v množinové reprezentaci.
- Rezolucí na úrovni VL ověříme její nesplnitelnost.

Např. pro $S = \{\{P(x, y), R(x, y)\}, \{\neg P(c, y)\}, \{\neg R(x, f(x))\}\}$ je

$S' = \{\{P(c, c), R(c, c)\}, \{P(c, f(c)), R(c, f(c))\}, \{P(f(c), f(c)), R(f(c), f(c))\} \dots, \{\neg P(c, c)\}, \{\neg P(c, f(c))\}, \dots, \{\neg R(c, f(c))\}, \{\neg R(f(c), f(f(c)))\}, \dots\}$

nesplnitelná, neboť na úrovni VL je

$$S' \supseteq \{\{P(c, f(c)), R(c, f(c))\}, \{\neg P(c, f(c))\}, \{\neg R(c, f(c))\}\} \vdash_R \square.$$

Substituce - příklady

Efektivnější je využívat vhodných substitucí. Např. pro

- a) $\{P(x), Q(x, a)\}, \{\neg P(y), \neg Q(b, y)\}$ substitucí $x/b, y/a$ dostaneme $\{P(b), Q(b, a)\}, \{\neg P(a), \neg Q(b, a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(b), \neg P(a)\}$.

Nebo substitucí x/y a rezolucí dle $P(y)$ dostaneme $\{Q(y, a), \neg Q(b, y)\}$.

- b) $\{P(x), Q(x, a), Q(b, y)\}, \{\neg P(v), \neg Q(u, v)\}$ substituce $x/b, y/a, u/b, v/a$ dává $\{P(b), Q(b, a)\}, \{\neg P(a), \neg Q(b, a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(b), \neg P(a)\}$.

- c) $\{P(x), Q(x, z)\}, \{\neg P(y), \neg Q(f(y), y)\}$ substitucí $x/f(z), y/z$ dostaneme $\{P(f(z)), Q(f(z), z)\}, \{\neg P(z), \neg Q(f(z), z)\}$ a z nich $\{P(f(z)), \neg P(z)\}$.

Při substituci $x/f(a), y/a, z/a$ dostaneme $\{P(f(a)), Q(f(a), a)\}, \{\neg P(a), \neg Q(f(a), a)\}$ a z nich rezolucí $\{P(f(a)), \neg P(a)\}$. Předchozí substituce je ale **obecnější**.

Substituce

- **Substituce** je (konečná) množina $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$, kde x_i jsou navzájem různé proměnné a t_i jsou termy, přičemž t_i není x_i .
- Jsou-li všechny termy t_i konstantní, je σ **základní substituce**.
- Jsou-li t_i navzájem různé proměnné, je σ **přejmenování proměnných**.
- **Výraz** je literál nebo term. (Substituci lze aplikovat na výrazy.)
- **Instance** výrazu E při substituci $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ je výraz $E\sigma$ vzniklý z E současným nahrazením všech výskytů proměnných x_i za t_i .
- Pro množinu výrazů S označme $S\sigma$ množinu instancí $E\sigma$ výrazů E z S .

Poznámka Jelikož substituce je současná pro všechny proměnné zároveň, případný výskyt proměnné x_i v termu t_j nevede k zřetězení substitucí.

Např. pro $S = \{P(x), R(y, z)\}$ a substituci $\sigma = \{x/f(y, z), y/x, z/c\}$ je

$$S\sigma = \{P(f(y, z)), R(x, c)\}.$$

Skládání substitucí

Zdefinujeme $\sigma\tau$ tak, aby $E(\sigma\tau) = (E\sigma)\tau$ pro každý výraz E .

Např. pro $E = P(x, w, u)$, $\sigma = \{x/f(y), w/v\}$, $\tau = \{x/a, y/g(x), v/w, u/c\}$ je

$$E\sigma = P(f(y), v, u), \quad (E\sigma)\tau = P(f(g(x)), w, c).$$

Pak by mělo být $\sigma\tau = \{x/f(g(x)), y/g(x), v/w, u/c\}$.

Pro substitute $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ a $\tau = \{y_1/s_1, \dots, y_m/s_m\}$ definujeme

$$\sigma\tau = \{x_i/t_i\tau \mid x_i \in X, x_i \text{ není } t_i\tau\} \cup \{y_j/s_j \mid y_j \in Y \setminus X\}$$

složenou substitucí σ a τ , kde $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ a $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$.

Poznámka Skládání substitucí není komutativní, např. pro uvedené σ a τ je

$$\tau\sigma = \{x/a, y/g(f(y)), u/c, w/v\} \neq \sigma\tau.$$

Skládání substitucí - vlastnosti

Ukážeme, že definice vyhovuje našemu požadavku a skládání je asociativní.

Tvrzení Pro každý výraz E a substituce σ, τ, ϱ platí

$$(i) \quad (E\sigma)\tau = E(\sigma\tau),$$

$$(ii) \quad (\sigma\tau)\varrho = \sigma(\tau\varrho).$$

Důkaz Nechť $\sigma = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ a $\tau = \{y_1/s_1, \dots, y_m/s_m\}$. Stačí uvážit případ, kdy E je proměnná, řekněme v .

(i) Je-li v proměnná x_i pro nějaké i , je $v\sigma = t_i$ a $(v\sigma)\tau = t_i\tau$, což je $v(\sigma\tau)$ dle definice $\sigma\tau$. Jinak $v\sigma = v$ a $(v\sigma)\tau = v\tau$.

Je-li v proměnná y_j pro nějaké j , je dále $(v\sigma)\tau = v\tau = s_j$, což je $v(\sigma\tau)$ dle definice $\sigma\tau$. Jinak $(v\sigma)\tau = v\tau = v$ a zároveň $v(\sigma\tau) = v$.

(ii) Opakovaným užitím (i) dostaneme pro každý výraz E ,

$$E((\sigma\tau)\varrho) = (E(\sigma\tau))\varrho = ((E\sigma)\tau)\varrho = (E\sigma)(\tau\varrho) = E(\sigma(\tau\varrho)). \quad \square$$